Elektrodynamika klasyczna

Lorentzowsko niezmiennicza teoria pola, dana przez równania Maxwella

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad \text{(a)} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} \quad \text{(b)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{(c)} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{(d)}$$

w jednostkach ($c = 1,\ \mu_0 = 1,\ \varepsilon_0 = 1$, gdzie siła $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi r^2}$). W klasycznej elektrodynamice źródła są niezależne i podlegają zasadzie zachowania ładunku

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0,$$

które daje się zapisać w postaci loretzowsko niezmienniczej:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \qquad \text{gdzie} \qquad J^\mu = (\rho, \vec{J}).$$

Równania jednorodne (c) i (d) są równoważne istnieniu potencjałów

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Wprowadza się *czteropotencjał*:

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A})$$

oraz *tensor pola* elektromagnetycznego:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

Łatwo pokazać, że

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Wówczas równania jednorodne (c) i (d) redukują się do tożsamości:

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} \equiv 0,$$

a równania niejednorodne (a) i (b) przyjmują jawnie kowariantną postać

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu.$$

Zasada wariacyjna

Jaką postać ma gęstość Lagrange'a, która prowadzi do równań Maxwella, jeśli

$$A^\mu \to A^\mu + (\delta A)^\mu$$

przy ustalonym J^μ?

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu .$$

Rzeczywiście

$$\delta S = \delta \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\nu A_\nu \right] \qquad \text{wariacja kwadratu } \delta F^2 = 2F\left(\delta F\right)$$

$$= \int d^4x \left[-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \left(\delta F\right)^{\mu\nu} - J^\nu \left(\delta A\right)_\nu \right] \qquad \text{jawna postać } F^{\mu\nu}$$

$$= \int d^4x \left[-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \left[\partial^\mu \left(\delta A\right)^\nu - \partial^\nu \left(\delta A\right)^\mu \right] - J^\nu \left(\delta A\right)_\nu \right] \qquad \text{antysymetria } F_{\mu\nu}$$

$$= \int d^4x \left[-F_{\mu\nu} \partial^\mu \left(\delta A\right)^\nu - J^\mu \left(\delta A\right)_\mu \right] \qquad \text{całka przez części}$$

$$= \int d^4x \left[\partial^\mu F_{\mu\nu} \left(\delta A\right)^\nu - J^\nu \left(\delta A\right)_\nu \right] \qquad \text{zamiana indeksów górnych na dolne}$$

$$= \int d^4x \left[\partial_\mu F^{\mu\nu} - J^\nu \right] \left(\delta A\right)_\nu = 0$$

Zadanie: pokazać, że

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - J^\mu A_\mu.$$

Swoboda cechowania

Potencjał A^μ nie jest jednozacznie określony

$$A^\mu \quad \text{oraz} \quad A^\mu + \partial^\mu \chi$$

prowadzą do tego samego tensora pola

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \to \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \underbrace{\partial^\mu \partial^\nu \chi - \partial^\nu \partial^\mu \chi}_{=0} = F^{\mu\nu}.$$

Transformacja

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$$

nazywa się transformacją cechowania (gauge transformation). Pod wpływem transformacji cechowania zmienia się jednak działanie:

$$\begin{aligned} \Delta S &= -\int d^4x \, J_\nu \, \partial^\nu \chi \quad \text{całka przez części} \\ &= \int d^4x \, (\partial^\nu J_\nu) \, \chi. \end{aligned}$$

$\Delta S = 0$ dla dowolnego χ, jedynie gdy zachowany jest ładunek

$$\partial^\nu J_\nu = 0.$$

NIEZMIENNICZOŚĆ WZGL. TRANSFORMACJI CECHOWANIA

$$\downarrow$$

ZACHOWANIE ŁADUNKU

Rozwiązania równań Maxwella

Równania Maxwella

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

wyrażone przez potencjały, mają postać

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = J^\nu.$$

Musimy ustalić cechowanie. Typowy wybór: cechowanie radiacyjne (kulombowskie)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

(w całej przestrzeni i w każdej chwili) nie jest niezmienniczy lorentzowsko (nie jest prawdziwy w innym, poruszajacym sie układzie). W cechowaniu radiacyjnym równanie na potencjał elektryczny $\Phi = A^0$ ma postać:

$$\partial_i \partial^i A^0 = -\vec{\nabla}^2 A^0 = J^0 = \rho.$$

UWAGA:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \vec{\nabla}), \quad \partial^\mu = (\partial_t, -\vec{\nabla})$$

Rzeczywiście, mając na uwadze, że w cechowaniu radiacyjnym

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_0 A^0$$

mamy

$$J^0 = (\partial_\mu \partial^\mu)\, A^0 - \partial^0 (\partial_\mu A^\mu) = -\vec{\nabla}^2 A^0 + \underbrace{\partial_t^2 A^0 - \partial_t^2 A^0}_{=0}.$$

Rozwiązania są znane

$$A^0(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

i otrzymuje się je metodą funkcji Greena. W cechowaniu radiacyjnym $\Phi = A^0$ jest „na sztywno” związane z ładunkiem, nie ma rozwiązań falowych na A^0.

Składowe wektorowe

$$J^i = (\partial_\mu \partial^\mu)\, A^i + \partial^i (\partial_\mu A^\mu) \to \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} A^0.$$

W pustej przestrzeni ($\rho = 0,\ \vec{J} = 0$) w cechowaniu radiacyjnym mamy:

$$A^0 = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = 0.$$

Wygląda to jak trzy równania Kleina-Gordona na składowe $A^{1,2,3}$ z $m = 0$

Rozwiązania są dane jako fale:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{\varepsilon}\, a \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t + \theta_k)$$

gdzie $\omega_k^2 = k^2$, z tym, że nie są to pola niezależne, bo

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \rightarrow \vec{k}\cdot\vec{\varepsilon} = 0.$$

Zatem są tylko *dwa* niezależne wektory trójwymiarowe $\vec{\varepsilon}_{1,2}(\vec{k})$: mamy *dwie* polaryzacje ($A^0 = 0$). Ogólnie

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\sum_{\lambda=1,2}\vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k})\left[\frac{a_{\vec{k}\lambda}}{\sqrt{2\omega_k}}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + \frac{a^*_{\vec{k}\lambda}}{\sqrt{2\omega_k}}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}\right],$$

gdzie

$$\vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k})$$

są niezależnymi liniowo wektorami jednostkowymi, prostopodłymi do $\vec{k}$. Podobnie jak przypadku pola skalarnego zamykamy układ w pudle $V = l^3$ i przyjmujemy periodyczne warunki brzegowe.

Możliwe są inne wybory cechowania. Używa się często relatywistycznie niezmienniczych cechowań, jak cechowanie Lorentza (lub Landaua):

$$\partial_\mu A^\mu = 0,$$

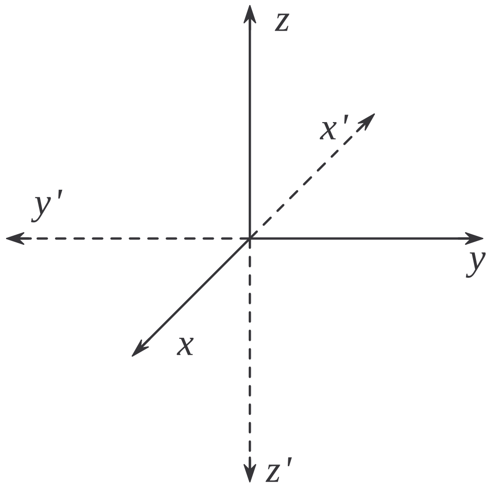
w którym równania pola mają postać

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) A^\mu = J^\mu.$$

Inne użyteczne cechowania:

$$\begin{array}{ll} A^0 = 0 & \text{czasowe} \\ A^3 = 0 & \text{osiowe} \\ \Phi \in \mathcal{R} & \text{unitarne} \end{array}$$

Odbicie przestrzenne



Rozważmy odbicie, które zmienia *skrętność* układu współrzędnych (parzystość $\mathcal{P}$):

$$\vec{r} \longrightarrow \vec{r}\,' = -\vec{r}, \quad \vec{\nabla} \longrightarrow \vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}$$

Gęstość ładunku się nie zmienia, ale prąd ($\vec{J} = \rho\vec{v}$) tak

$$\rho(\vec{r},t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \rho^{\mathcal{P}}(\vec{r}\,',t) = \rho(\vec{r},t), \qquad \vec{J}(\vec{r},t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \vec{J}^{\mathcal{P}}(\vec{r}\,',t) = -\vec{J}(\vec{r},t).$$

Pole elektryczne jest wektorem, magnetyczne pseudowektorem:

$$\vec{E}(\vec{r},t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \vec{E}^{\mathcal{P}}(\vec{r}\,',t) = -\vec{E}(\vec{r},t), \qquad \vec{B}(\vec{r},t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \vec{B}^{\mathcal{P}}(\vec{r}\,',t) = \vec{B}(\vec{r},t).$$

$$\rho(\vec{r},t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \rho^{\mathcal{P}}(\vec{r}\,',t) = \rho(\vec{r},t), \qquad \vec{J}(\vec{r},t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \vec{J}^{\mathcal{P}}(\vec{r}\,',t) = -\vec{J}(\vec{r},t).$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \vec{E}^{\mathcal{P}}(\vec{r}\,',t) = -\vec{E}(\vec{r},t), \qquad \vec{B}(\vec{r},t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \vec{B}^{\mathcal{P}}(\vec{r}\,',t) = \vec{B}(\vec{r},t).$$

Stąd:

$$\Phi(\vec{r},t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \Phi^{\mathcal{P}}(\vec{r}\,',t) = \Phi(\vec{r},t), \qquad \vec{A}(\vec{r},t) \xrightarrow{\mathcal{P}} \vec{A}^{\mathcal{P}}(\vec{r}\,',t) = -\vec{A}(\vec{r},t).$$

Równania Maxwella są niezmiennicze, mają taką samą postać w wyjściowym (prawoskrętnym) układzie i w przetransformowanym (lewoskrętnym). Najlepiej widać to z postaci równań:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad \text{(a)} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} \quad \text{(b)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{(c)} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{(d)}$$

Lagrangian jest też niezmienniczy.

Sprzężenie ładunkowe

polega na zamianie czątki na antycząstkę ($\mathcal{C}$ – charge conjugation):

$$\rho(\vec{r},t) \xrightarrow{\mathcal{C}} \rho^{\mathcal{C}}(\vec{r},t) = -\rho(\vec{r},t), \qquad \vec{J}(\vec{r},t) \xrightarrow{\mathcal{C}} \vec{J}^{\mathcal{C}}(\vec{r},t) = -\vec{J}(\vec{r},t).$$

Aby równania Maxwella były niezmiennicze, musimy przyjąć:

$$\Phi(\vec{r},t) \xrightarrow{\mathcal{C}} \Phi^{\mathcal{C}}(\vec{r},t) = -\Phi(\vec{r},t), \qquad \vec{A}(\vec{r}) \xrightarrow{\mathcal{C}} \vec{A}^{\mathcal{C}}(\vec{r},t) = -\vec{A}(\vec{r},t).$$

Lagrangian jest też niezmienniczy.

Spin fotonu

W mechanice kwantowej f. falowe transformują się w wyniku obrotów. Rozpatrzmy funkcję, która sama jest wektorem:

$$\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \psi^1_\alpha(\vec{r}) \\ \psi^2_\alpha(\vec{r}) \\ \psi^2_\alpha(\vec{r}) \end{bmatrix}.$$

Wówczas prawo transformacji przybiera postać

$$\vec{\psi}_\beta(R\,\vec{r}) = R\,\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \rightarrow \vec{\psi}_\beta(\,\vec{r}) = R\,\vec{\psi}_\alpha(R^{-1}\vec{r})$$

Macierz R działa tylko na wskaźniki wektorowe funkcji falowej, a nie na indeksy α, β. Stąd operator $\hat{U}_R$, przekształcający funkcję falową (zmaiana stanu) spełnia równanie

$$\hat{U}_R\,\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \psi_\beta(\vec{r}) = R\,\vec{\psi}_\alpha(R^{-1}\vec{r}). \tag{1}$$

Dla obrotów infinitenzymalnych

$$\begin{aligned}
\hat{U}_R\,\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= \left(1-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}\right)\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}-\vec{\phi}\times\vec{r}) \\
&= \left(1-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}\right)\left(1-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}\right)\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}\right)\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).
\end{aligned}$$

Pamiętajmy, że $\vec{S}$ działają na indeksy wektorowe funkcji $\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})$, a $\vec{L}$ są operatorami różniczkowymi. Zatem

$$\hat{U}_R\left(\vec{\phi}\right) = 1-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\left(\vec{S}+\vec{L}\right)+\dots$$

czyli że generatory obrotów są sumą generatora $\vec{L}$ i generatora $\vec{S}$.

$$\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}.$$

Spin dla cząstki z masą definiujemy jako wartość własną generatora obrotu dla cząstki w spoczynku. Foton nigdy nie spoczywa. Wybierzmy foton, który porusza się po prostej wzdłuż osi z. Wówczas $J_z = S_z$. Operator S_z można odczytać ze wzoru:

$$S_z = i\hbar \lim_{\phi \to 0} \left(\hat{U}_{R_z}(\phi) - 1 \right) / \phi$$

gdzie $\hat{U}_{R_z}(\phi) = R_z(\phi)$.

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq 1 + \begin{bmatrix} 0 & -\phi & 0 \\ \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_z = \hbar \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ponieważ $\vec{k} = (0,0,1)$ mamy dwa poprzeczne wektory polaryzacji

$$\varepsilon_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$\vec{A}_{\vec{k}}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \left(\vec{\varepsilon}_x(\vec{k}) a_{\vec{k}x} + \vec{\varepsilon}_y(\vec{k}) a_{\vec{k}y} \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + \text{h.c.}$$

Zdiagonalizujmy macierz S_z:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -i & 0 \\ i & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + \lambda \to \lambda_{\pm,0} = \pm 1, 0.$$

Wektory własne:

$$\vec{\varepsilon}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\varepsilon}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i

$$\vec{\varepsilon}_x = \sqrt{2}(\vec{\varepsilon}_+ + \vec{\varepsilon}_-), \quad \vec{\varepsilon}_y = -i\sqrt{2}(\vec{\varepsilon}_+ - \vec{\varepsilon}_-), \quad \vec{\varepsilon}^{\,*}_+ = \vec{\varepsilon}$$

Zatem pole $\vec{A}_{\vec{k}}(\vec{r},t)$ możemy rozpisać:

$$\begin{aligned}\vec{A}_{\vec{k}}(\vec{r},t) &= \frac{1}{\sqrt{\omega_k V}}\Big((\vec{\varepsilon}_+ + \vec{\varepsilon}_-)a_{\vec{k}x} - i(\vec{\varepsilon}_+ - \vec{\varepsilon}_-)a_{\vec{k}y}\Big)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + \text{h.c.} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\omega_k V}}\Big(\vec{\varepsilon}_+(a_{\vec{k}x} - ia_{\vec{k}y}) + \vec{\varepsilon}_-(a_{\vec{k}x} + ia_{\vec{k}y})\Big)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + \text{h.c.}\end{aligned}$$

Czyli dowolne pole opisujace promieniowanie dane poprzez fale płaskie można rozłożyć na dwie składowe o rzucie spinu na oś z równym $+$ lub $-$ (tak na prawdę jest to polaryzacja kołowa). Nie ma składowej zerowej! Foton jest zawsze poprzeczny.

Energia pola elektromagnetycznego

Ponieważ pole A^μ jest w zasadzie superpozycją 2 pól skalarnuch (abstrahując od własności transformacyjnych), zatem

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\partial_\nu \varphi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \to T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\rho)}\partial_\nu A^\rho - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}$$

co daje

$$T^0_0 = -F_{0\mu}F^{0\nu} + F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$$

Energia i pęd dane są jako

$$H = \int d^3 r T^0_0 = \sum_{\vec{k},\lambda} \omega_k a^*_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda}$$

$$\vec{P} = \sum_{\vec{k},\lambda} \vec{k} a^*_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda}$$

Masywne pole wektorowe

Wielki sukces modelu standardowego polega na poprawnej konstrukcji teorii pola wektorowego z masą. Proste uogólnienie wzorujące się na polu skalarnym

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - J^\mu A_\mu$$

nie jest niezmiennicze wzgledem transformacji cechowania. (Znak przy masie sprawdzimy a'posteriori). Zbadajmy jednak konsekwencje takiego lagrangianu. Równania ruchu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = J^\nu.$$

Widać, że zmiana cechowania nie zmienia $\partial_\mu F^{\mu\nu}$ oraz J^ν a zmienia A^ν. Różniczkując to równanie po ∂_ν mamy

$$m^2\partial_\nu A^\nu = \partial_\nu J^\nu.$$

To nie jest warunek ustalający cechowanie, ale wskazuje, że nie wszystkie składowe pola A^ν są niezależne. Rozpiszmy równanie ruchu

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu - J^\nu = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu - J^\nu \\ &= \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{m^2}\partial^\nu \partial_\mu J^\mu + m^2 A^\nu - J^\nu. \end{aligned}$$

W próżni ($J^\mu = 0$)

$$\frac{\partial^2 A^\nu}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 A^\nu + m^2 A^\nu = 0$$

analogicznie do równania Kleina-Gordona

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 - m^2\right)\varphi = 0,$$

co potwierdza poprawność wyboru znaku m^2. Rozwiązanie w postaci fal płaskich

$$A^\nu = \varepsilon^\nu a \cos(kx + \theta)$$

gdzie

$$kx = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}, \quad \omega^2 - \vec{k}^{\,2} = m^2.$$

Dodatkowy warunek

$$k\varepsilon = 0.$$

Wybierając pęd w kierunku osi z:

$$k = (\omega, 0, 0, k)$$

mamy trzy (znormalizowane $\varepsilon^2 = -1$) wektory polaryzacji

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $m \neq 0$ „foton" może spoczywać. Podobnie jak poprzednio, można zdefiniować operator spinu. Oprócz polaryzacji $\pm$ mamy polaryzację $\lambda = 0$.

Równanie Diraka

Wracamy do poprzedniego problemu: jak napisać relatywistyczne równanie „Schrödingera”, tak by było ono liniowe w $E \to i\hbar\partial_t$ i liniowe w $\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$ (musi być liniowe, żeby po podniesieniu do kwadratu

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2.$$

Dirac zapostulował

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m = \vec{\alpha} \cdot (-i\hbar\vec{\nabla}) + \beta m,$$

gdzie $\vec{\alpha}$ oraz β to współczyniki liczbowe, które nie koniecznie komutują (macierze). Stąd pełne równanie ($\hbar = 1$)

$$(i\partial_t + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \beta m)\psi = 0.$$

Podnieśmy do kwadratu H:

$$\begin{aligned}(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)^2 &= \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2 p_i^2 + \beta^2 m^2 \\ &+ \sum_{i<j} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i)\, p_i p_j + m \sum_{i<j} (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i)\, p_i \\ &= \vec{p}^2 + m^2\end{aligned}$$

Stąd:

$$\begin{aligned}\alpha_i^2 = \beta^2 &= 1, \\ \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0, \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= \{\alpha_i, \beta\} = 0.\end{aligned}$$

Okazuje się, że rozwiązaniem tych warunków są macierze hermitowskie o wymiarze parzystym. W liczbie wymiarów 3+1 najmniejszy możliwy wymiar tych macierzy jest 4 (Bjorken-Drell):

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nie jest to jedyna możliwa postać. Jest nieskończenie wiele reprezentacji macierzy $\vec{\alpha}$ i β unitarnie równoważnych:

$$\alpha_i \to U\alpha_i U^\dagger, \quad \beta \to U\beta U^\dagger,$$

które spełniają związki antykomutacji. Inna użyteczna reprezentacja (chiralna):

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Funkcje falowe są czterkomponentowe (bispinory Diraka):

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}, \quad \psi^\dagger = \begin{bmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{bmatrix}$$

cząstka i antycząstka w 2 stanach spinowych. Każdy spinor ma 8 stopni swobody (ψ_i są zespolone).

Gęstość Lagrange'a

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger (i\partial_t + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \beta m)\psi.$$

Zamiast prowdzić wariacje po Reψ i Imψ, wariujemy ψ i $\psi^\dagger$. Równanie Diraka jest automatyczne, bo jest $\mathcal{L}$ liniowe w ψ i $\psi^\dagger$.