

Człony masowe

Prawa transformacji $U(1) \times SU(2)$:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\theta(x)} U(x) \Phi, \quad L \rightarrow L' = e^{i\theta(x)} U(x) L, \quad e_R \rightarrow e'_R = e^{i2\theta(x)} e_R$$

Jakie mogą być człony niezmiennicze ($SU(2) \times U(1)$ i lorentzowskie):

$$L^\dagger \Phi \implies \text{niezmiennik } SU(2), \text{ ale dostaje fazę } U(1): e^{-i2\theta(x)}$$

$$(L^\dagger \Phi) e_R \implies \text{niezmiennik } SU(2) \times U(1)$$

Zatem niezmienniczy lagrangian:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^e &= -\lambda_e \left\{ (L^\dagger \Phi) e_R + e_R^\dagger (\Phi^\dagger L) \right\} \\ &= -\lambda_e \left\{ \Phi_A \left(\nu_{eL}^\dagger e_R \right) + \Phi_B \left(e_L^\dagger e_R \right) + \Phi_A^\dagger \left(e_R^\dagger \nu_{eL} \right) + \Phi_B^\dagger \left(e_R^\dagger e_L \right) \right\} \end{aligned}$$

gdzie użyliśmy

$$L = \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{bmatrix}$$

Stała λ_e zwana sprzężeniem Yukawy jest *całkowicie dowolna*.

Uogólnienia członu masowego

Dla leptonów mieliśmy

$$\mathcal{L}_{mass} = - \sum_{k=e,\mu,\tau} \lambda_k \left[\left(L_k^\dagger \Phi \right) r_k + r_k^\dagger (\Phi^\dagger L_k) \right]$$

Można zamiast stałych Yukawy λ_k wprowadzić macierze 3×3 :

$$\mathcal{L}_{mass} = - \sum_{k=e,\mu,\tau} \left[\lambda_{jk} \left(L_j^\dagger \Phi \right) r_k + \lambda_{jk}^* r_k^\dagger (\Phi^\dagger L_j) \right].$$

Dowolną macierz kwadratową można zdiagonalizować przy pomocy transformacji biunitarnej

$$\lambda = U_L^\dagger \lambda^D U_R$$

gdzie

$$\lambda_{jk}^D = \lambda_k \delta_{jk}$$

Dowód:

$$\lambda\lambda^\dagger = \Lambda \text{ jest hermitowska}$$

Każda macierz hermitowska daje się zdiagonalizować i ma rzeczywiste, dodatnie wartości własne (zero stanowi pewną komplikację):

$$U_1 (\lambda\lambda^\dagger) U_1^\dagger = \Lambda^D = (\lambda^D)^2.$$

Także λ_D jest diagonalna i ma rzeczywiste wartości własne. Przepiszmy:

$$\text{macierz hermitowska: } (\lambda\lambda^\dagger) = \underbrace{U_1^\dagger \lambda^D U_1}_h \underbrace{U_1^\dagger \lambda^D U_1}_h = h^2$$

gdzie h jest hermitowska. Łatwo się przekonać, że

$$V = h^{-1}\lambda \text{ jest unitarna}$$

Rzeczywiście ($U_1^\dagger = U^{-1}$)

$$VV^\dagger = h^{-1}\lambda\lambda^\dagger (h^{-1})^\dagger = U_1^\dagger (\lambda^D)^{-1} U_1 \lambda\lambda^\dagger U_1^\dagger (\lambda^D)^{-1} U_1$$

Dowód:

$$\lambda\lambda^\dagger = \Lambda \text{ jest hermitowska}$$

Macierz ta daje się zdiagonalizować i ma rzeczywiste, dodatnie wartości własne (zero stanowi pewną komplikację):

$$U_1 (\lambda\lambda^\dagger) U_1^\dagger = (U_1\lambda) (U_1\lambda)^\dagger = \Lambda^D = (\lambda^D)^2.$$

Także λ_D jest diagonalna i można ją wybrać aby miała rzeczywiste, **dodatnie** wartości własne. Przepiszmy:

$$\text{macierz hermitowska: } (\lambda\lambda^\dagger) = \underbrace{U_1^\dagger \lambda^D U_1}_h \underbrace{U_1^\dagger \lambda^D U_1}_h = h^2$$

gdzie h jest hermitowska. Łatwo się przekonać, że

$$V = h^{-1}\lambda \text{ jest unitarna}$$

Rzeczywiście ($U_1^\dagger = U_1^{-1}$)

$$VV^\dagger = h^{-1}\lambda\lambda^\dagger (h^{-1})^\dagger = U_1^\dagger (\lambda^D)^{-1} \underbrace{U_1\lambda\lambda^\dagger U_1^\dagger}_{(\lambda^D)^2} (\lambda^D)^{-1} U_1 = 1$$

Zatem

$$\lambda = hV = U_1^\dagger \lambda^D U_1 V = U_1^\dagger \lambda^D U_2, \quad U_2 = U_1 V \text{ jest unitarna}$$

Można zamiast stałych Yukawy λ_k wprowadzić macierze

$$\mathcal{L}_{mass} = - \sum \left[\lambda_{jk} \left(L_j^\dagger \Phi \right) r_k + \lambda_{jk}^* r_k^\dagger (\Phi^\dagger L_j) \right].$$

Mamy

$$\lambda_{jk} = \left(U_L^\dagger \right)_{jm} \lambda_m (U_R)_{mk}$$

i dalej

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass} &= - \sum \left[\left(U_L^\dagger \right)_{jm} \lambda_m (U_R)_{mk} \left(L_j^\dagger \Phi \right) r_k + \left(U_L^T \right)_{jm} \lambda_m (U_R^*)_{mk} r_k^\dagger (\Phi^\dagger L_j) \right] \\ &= - \sum \lambda_m \left[\left(L_j^\dagger \left(U_L^\dagger \right)_{jm} \Phi \right) (U_R)_{mk} r_k + r_k^\dagger \left(U_R^\dagger \right)_{km} (\Phi^\dagger (U_L)_{mj} L_j) \right] \\ &= - \sum \lambda_m \left[\left((U_L L)_m^\dagger \Phi \right) (U_R r)_m + (U_R r)_m^\dagger (\Phi^\dagger (U_L L)_m) \right] \end{aligned}$$

Nowe pola

$$L' = U_L L, \quad r' = U_R r$$

i \mathcal{L}_{mass} jest diagonalny. Inne człony są nieczułe; są typu $L^\dagger \dots L$ lub $r^\dagger \dots r$.

Macierze U_L i U_R są jednoznaczne z dokładnością do faz:

$$\begin{bmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_3} \end{bmatrix}$$

prowadzących do zachowania liczby elektronowej, mionowej i tauowej.

Kwarki w modelu standardowym

Rozpad β :

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

na poziomie kwarków

$$\begin{pmatrix} u \\ \mathbf{d} \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ \mathbf{u} \\ d \end{pmatrix} + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Rozpad mionu

$$\mu \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$$

zachodzi przez sprzężenie do W :

$$L^\dagger i\tilde{\sigma}^\mu D_\mu L = \begin{bmatrix} \nu_{\mu L}^\dagger & \mu_L^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{bmatrix}$$

sugeruje

$$L = \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix} - \text{dublet SU(2)}$$

oraz

$$u_R, d_R - \text{singlety SU(2)}$$

Pamiętajmy, że ładunki kwarków są:

$$q_{\text{up}} = +\frac{2}{3} \text{ dla } u, c, t \quad q_{\text{down}} = -\frac{1}{3} \text{ dla } d, s, b$$

Dlatego, dla pierwszej generacji:

$$\mathcal{L} = L^\dagger i\tilde{\sigma}^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{6}B_\mu + i\frac{g_2}{2}\mathbf{W}_\mu \right) L, \quad e = g_2 \sin \theta_W = g_1 \cos \theta_W$$

bo

$$D_\mu L = \begin{bmatrix} \partial_\mu + i\frac{g_1}{6}B_\mu + i\frac{g_2}{2}W_\mu^3 & i\frac{g_2}{2}\sqrt{2}W_\mu^+ \\ i\frac{g_2}{2}\sqrt{2}W_\mu^- & \partial_\mu + i\frac{g_1}{6}B_\mu - i\frac{g_2}{2}W_\mu^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{bmatrix}$$

Pamiętając

$$B = A \cos \theta_W - Z \sin \theta_W, \quad W^3 = Z \cos \theta_W + A \sin \theta_W$$

mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{g_1}{3} B + g_2 W^3 \right) &= \frac{g_1}{6} (A \cos \theta_W - Z \sin \theta_W) + \frac{g_2}{2} (Z \cos \theta_W + A \sin \theta_W) \\ &= \frac{1}{6} A (g_1 \cos \theta_W + 3g_2 \sin \theta_W) + \dots = \frac{2e}{3} A + \dots \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{g_1}{3} B - g_2 W^3 \right) &= \frac{g_1}{6} (A \cos \theta_W - Z \sin \theta_W) - \frac{g_2}{2} (Z \cos \theta_W + A \sin \theta_W) \\ &= \frac{1}{6} A (g_1 \cos \theta_W - 3g_2 \sin \theta_W) + \dots = -\frac{e}{3} A + \dots \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{dyn} = & \left[u_L^\dagger \quad d_L^\dagger \right] \times \\
& \times i\tilde{\sigma}^\mu \left[\begin{array}{cc} \partial_\mu + i\frac{2e}{3}A_\mu + i\frac{e(1+2\cos 2\theta_W)}{3\sin 2\theta_W}Z_\mu & i\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\tilde{\sigma}^\mu W_\mu^+ \\ i\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\tilde{\sigma}^\mu W_\mu^- & \partial_\mu - i\frac{e}{3}A_\mu - i\frac{e(2+\cos 2\theta_W)}{3\sin 2\theta_W}Z_\mu \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix} \\
& + u_R^\dagger i\sigma^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{2e}{3}A_\mu - i\frac{2e}{3}\tan\theta_W Z_\mu \right) u_R \\
& + d_R^\dagger i\sigma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{e}{3}A_\mu + i\frac{e}{3}\tan\theta_W Z_\mu \right) d_R
\end{aligned}$$

Ponieważ mamy 3 generacje:

$$L_k = \begin{bmatrix} u_{kL} \\ d_{kL} \end{bmatrix}, \quad u_{kR}, \quad d_{kR} \quad \text{gdzie} \quad k = 1, 2, 3 \quad \mathcal{L}_{dyn} = \sum_{k=1}^3 \mathcal{L}_{k dyn}$$

Reguły transformacji:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\theta(x)} U(x) \Phi$$

$$L \rightarrow L' = e^{-i\theta(x)/3} U(x) L$$

$$u_R \rightarrow u'_R = e^{-i4\theta(x)/3} u_R$$

$$d_R \rightarrow d'_R = e^{+i2\theta(x)/3} d_R$$

Masy kwarków down

Konstrukcja oparta na analogii

$$d \leftrightarrow \text{leptony} \quad u \leftrightarrow \text{neutrino}$$

Można skopiować człon masowy z sektora leptonowego i kwarki d dostaną masę, a kwarki u zostaną bezmasowe:

$$L = \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_0 + h(x)/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

i

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{d\text{Higgs}} &= - \sum \left[\Lambda_{jk}^d \left(L_j^\dagger \Phi \right) d_{kR} + \Lambda_{jk}^{d*} d_{kR}^\dagger (\Phi^\dagger L_j) \right] \\ &\rightarrow -\phi_0 \sum \left[\Lambda_{jk}^d d_{jL}^\dagger d_{kR} + \Lambda_{jk}^{d*} d_{kR}^\dagger d_{jL} \right] \quad \text{człon masowy} \end{aligned}$$

gdzie Λ_{jk}^d jest macierzą sprzężeń Yukawy (można ją zdiagonalizować podobnie jak dla leptonów).

Jak wprowadzić masę dla kwarków u_i ?

$$L = \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix} \rightarrow L_1 = \begin{bmatrix} d_L \\ u_L \end{bmatrix}$$

i powtórzyć ten sam schemat. Musimy zadbać o transformację SU(2)!!!!

Tensor Levi-Civita

$$\varepsilon_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon^2 = -\mathbf{1}, \quad \varepsilon\varepsilon^T = 1$$

Mamy (uwaga na znak minus!):

$$L_\varepsilon = \varepsilon L = \begin{bmatrix} d_L \\ -u_L \end{bmatrix}$$

Jak to się transformuje? Skorzystamy z tożsamości

$$U^T \varepsilon U = \varepsilon \det U = \varepsilon.$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} U^T \varepsilon U &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{21} & u_{22} \\ -u_{11} & -u_{12} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & u_{11}u_{22} - u_{21}u_{12} \\ u_{21}u_{12} - u_{11}u_{22} & 0 \end{bmatrix} = \varepsilon \det U \end{aligned}$$

Zatem człon niezmienniczy względem SU(2):

$$u_R^\dagger (\Phi^T \varepsilon L)$$

To jest też niezmiennicze ze względu na U(1):

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\theta} U \Phi, \quad L \rightarrow L' = e^{-i\theta/3} U L, \quad u_R \rightarrow u'_R = e^{-i4\theta/3} u_R.$$

Zatem (uwaga na znak minus!)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{u \text{ Higgs}} &= - \sum \left[\Lambda_{jk}^u \left(L_j^\dagger \varepsilon \Phi^* \right) u_{kR} - \Lambda_{jk}^{u*} u_{kR}^\dagger (\Phi^T \varepsilon L_j) \right] \\ &\rightarrow -\phi_0 \sum \left[\Lambda_{jk}^u u_{jL}^\dagger u_{kR} + \Lambda_{jk}^{u*} u_{kR}^\dagger u_{jL} \right] \quad \text{człon masowy} \end{aligned}$$

Zatem człony masowe

$$\mathcal{L}_{q\text{ mass}} = -\phi_0 \sum \left[\Lambda_{jk}^d d_{jL}^\dagger d_{kR} + \Lambda_{jk}^{d*} d_{kR}^\dagger d_{jL} \right] - \phi_0 \sum \left[\Lambda_{jk}^u u_{jL}^\dagger u_{kR} + \Lambda_{jk}^{u*} u_{kR}^\dagger u_{jL} \right].$$

Macierze Λ^d oraz Λ^u można zdiagonalizować (nawet trzeba):

$$\phi_0 \Lambda_{jk}^d = D_L^\dagger M^d D_R, \quad \phi_0 \Lambda_{jk}^u = U_L^\dagger M^u U_R,$$

gdzie

$$M^d = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{bmatrix}, \quad M^u = \begin{bmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{bmatrix}.$$

Definiujemy nowe pola

$$\begin{aligned} d'_{jL} &= (D_L)_{jk} d_{kL}, & d'_{jR} &= (D_R)_{jk} d_{kR}, \\ u'_{jL} &= (U_L)_{jk} u_{kL}, & u'_{jR} &= (U_R)_{jk} u_{kR}, \end{aligned}$$

dla których człon masowy jest diagonalny (opuściliśmy primy):

$$\mathcal{L}_{q\text{ mass}} = - \sum_{j=d,s,b} \left[m_j^d \left(d'_{jL}^\dagger d_{jR} + d'_{jR}^\dagger d_{jL} \right) \right] - \sum_{j=u,c,t} \left[m_j^u \left(u'_{jL}^\dagger u_{jR} + u'_{jR}^\dagger u_{jL} \right) \right].$$

Jak taka transformacja odbija się na oddziaływaniach?

Oddziaływania:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{dyn} = & \sum_k \left[\begin{array}{cc} u_{kL}^\dagger & d_{kL}^\dagger \end{array} \right] \times \\
& \times i\tilde{\sigma}^\mu \left[\begin{array}{cc} \partial_\mu + i\frac{2e}{3}A_\mu + i\frac{e(1+2\cos\theta_W)}{3\sin 2\theta_W}Z_\mu & i\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\tilde{\sigma}^\mu W_\mu^+ \\ i\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\tilde{\sigma}^\mu W_\mu^- & \partial_\mu - i\frac{e}{3}A_\mu - i\frac{e(2+2\cos\theta_W)}{3\sin 2\theta_W}Z_\mu \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_{kL} \\ d_{kL} \end{bmatrix} \\
& + \sum_k u_{kR}^\dagger i\sigma^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{2e}{3}A_\mu - i\frac{2e}{3}\tan\theta_W Z_\mu \right) u_{kR} \\
& + \sum_k d_{kR}^\dagger i\sigma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{e}{3}A_\mu + i\frac{e}{3}\tan\theta_W Z_\mu \right) d_{kR}
\end{aligned}$$

Tylko człony z W^\pm przekształcają się przy transformacji (mechanizm GIM: Glashow, Iliopoulos, Maiani)

$$\begin{aligned}
d'_{jL} &= (D_L)_{jk} d_{kL}, & d'_{jR} &= (D_R)_{jk} d_{kR}, \\
u'_{jL} &= (U_L)_{jk} u_{kL}, & u'_{jR} &= (U_R)_{jk} u_{kR},
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{qW} = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \sum_k \left[\left(u_{kL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_{kL} \right) W_\mu^+ + \left(d_{kL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu u_{kL} \right) W_\mu^- \right]$$

gdzie

$$\left(D_L^\dagger \right)_{kj} d'_{jL} = d_{kL}, \quad \left(U_L^\dagger \right)_{ki} u'_{iL} = u_{kL}$$

i w konsekwencji

$$\mathcal{L}_{qW} = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \sum \left[(U_L)_{ik} \left(D_L^\dagger \right)_{kj} \left(u'_{iL} \tilde{\sigma}^\mu d'_{jL} \right) W_\mu^+ + (D_L)_{jk} \left(U_L^\dagger \right)_{ki} \left(d'_{jL} \tilde{\sigma}^\mu u'_{iL} \right) W_\mu^- \right]$$

$$\mathcal{L}_q W = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \sum_k \left[\left(u_{kL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_{kL} \right) W_\mu^+ + \left(d_{kL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu u_{kL} \right) W_\mu^- \right]$$

gdzie

$$\left(D_L^\dagger \right)_{kj} d'_{jL} = d_{kL}, \quad \left(U_L^\dagger \right)_{ki} u'_{iL} = u_{kL}$$

i w konsekwencji

$$\mathcal{L}_q W = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \sum \underbrace{\left[(U_L)_{ik} \left(D_L^\dagger \right)_{kj} \right]}_{V_{ij}} \left(u'_{iL} \tilde{\sigma}^\mu d'_{jL} \right) W_\mu^+ + \underbrace{\left[(D_L)_{jk} \left(U_L^\dagger \right)_{ki} \right]}_{V_{ij}^\dagger} \left(d'_{jL} \tilde{\sigma}^\mu u'_{iL} \right) W_\mu^-$$

$$\mathcal{L}_q W = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \sum_k \left[\left(u_{kL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_{kL} \right) W_\mu^+ + \left(d_{kL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu u_{kL} \right) W_\mu^- \right]$$

gdzie

$$\left(D_L^\dagger \right)_{kj} d'_{jL} = d_{kL}, \quad \left(U_L^\dagger \right)_{ki} u'_{iL} = u_{kL}$$

i w konsekwencji

$$\mathcal{L}_q W = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \sum \left[\underbrace{(U_L)_{ik} \left(D_L^\dagger \right)_{kj}}_{V_{ij}} \left(u'_{iL} \tilde{\sigma}^\mu d'_{jL} \right) W_\mu^+ + \underbrace{(D_L)_{jk} \left(U_L^\dagger \right)_{ki}}_{V_{ji}^\dagger} \left(d'_{jL} \tilde{\sigma}^\mu u'_{iL} \right) W_\mu^- \right]$$

Opuszczając primy:

$$\mathcal{L}_q W = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \sum \left[V_{ij} \left(u_{iL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_{jL} \right) W_\mu^+ + V_{ij}^\dagger \left(d_{iL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu u_{jL} \right) W_\mu^- \right]$$

gdzie

$$V = U_L D_L^\dagger$$

nosi nazwę macierzy mieszania Kobayashi-Maskawy. Dla 2 generacji taką transformację zaproponował wcześniej Cabbibo.

Uwaga historyczna: mechanizm GIM

Teoria Cabbibo:

$$\mathcal{L}_{dyn} = \begin{bmatrix} u_L^\dagger & d_L'^\dagger \end{bmatrix} \times$$

$$\times i\tilde{\sigma}^\mu \begin{bmatrix} \partial_\mu + i\frac{2e}{3}A_\mu + i\frac{e(1+2\cos\theta_W)}{3\sin 2\theta_W}Z_\mu & i\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\tilde{\sigma}^\mu W_\mu^+ \\ i\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\tilde{\sigma}^\mu W_\mu^- & \partial_\mu - i\frac{e}{3}A_\mu - i\frac{e(2+2\cos\theta_W)}{3\sin 2\theta_W}Z_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ d_L' \end{bmatrix}$$

gdzie

$$d_L' = \cos\theta_c d_L + \sin\theta_c s_L$$

co wynikało z fenomenologii oddziaływań z W . Jednak taka forma generuje zmieniające flavor prądy neutralne

$$\sim \sin\theta_c \cos\theta_c \left(s_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_L \right) Z_\mu$$

których się nie obserwuje (rozpady mezonów K). GIM (1970) zapostulowali drugi dublet SU(2)

$$\begin{bmatrix} c_L \\ \cos\theta_c s_L - \sin\theta_c d_L \end{bmatrix}$$

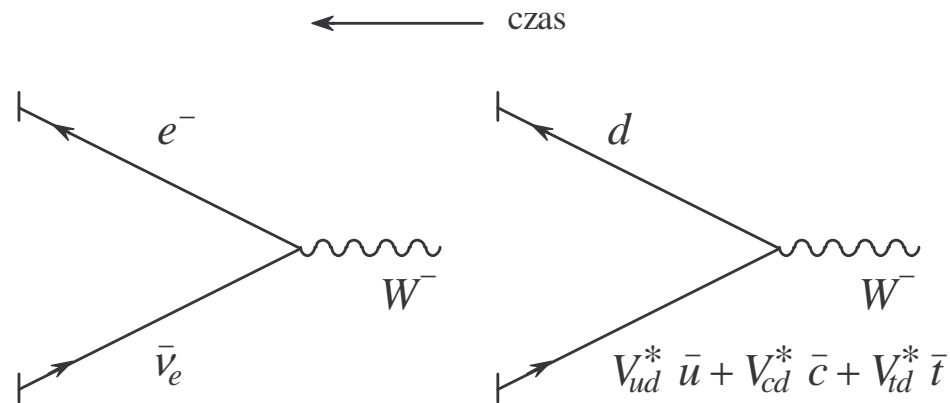
który kasował pierwszy przyczynek. Wymagało to zapostulowania istnienia kwarku c (odkryty w roku 1975)

Inny zapis:

$$\mathcal{L}_{qW} = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \sum \left[V_{ij} \left(u_{iL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_{jL} \right) W_\mu^+ + V_{ij}^\dagger \left(d_{iL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu u_{jL} \right) W_\mu^- \right]$$

ma postać

$$\mathcal{L}_{qW} = -\frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \left[u_L^\dagger, c_L^\dagger, t_L^\dagger \right] \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix} \tilde{\sigma}^\mu \begin{bmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{bmatrix} W_\mu^\dagger + \text{h.c.}$$



Oddziaływania słabe są niediagonalne w bazie flavorowej.

Macierz Kobayashi-Maskawy jest macierzą unitarną 3×3 (nie specjalną, wyznacznik nie musi być 1). Taka macierz ma $n^2 = 9$ swobodnych parametrów rzeczywistych. Jednak wiemy, że macierze U_L i D_L są wyznaczone z dokładnością to trzech faz każda:

$$U_L \rightarrow \begin{bmatrix} e^{i\alpha_u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_c} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_t} \end{bmatrix} U_L, \quad D_L \rightarrow \begin{bmatrix} e^{i\beta_u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta_c} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta_t} \end{bmatrix} D_L$$

taka transformacja zamienia

$$V_{ij} = \left(U_L D_L^\dagger \right)_{ij} \rightarrow e^{i(\alpha_i - \beta_j)} V_{ij}.$$

Liczba stopni swobody

Założmy, że mamy nie 3 generacje a n . Unitarna macierz zespolona $n \times n$ ma n^2 rzeczywistych stopni swobody.

Z kolei macierz ortogonalna $n \times n$ zależy od $n(n - 1)/2$ rzeczywistych kątów:

$$\begin{aligned} U &\rightarrow n^2 \\ O &\rightarrow \frac{1}{2}n(n - 1) \\ \text{różnica} &\rightarrow \frac{1}{2}n(n + 1) \end{aligned}$$

Zatem macierz unitarna $n \times n$ ma $n(n + 1)/2$ faz.

W naszym przypadku mamy $2n$ faz pól kwarkowych (n lewych i n prawych) ale ponieważ do elementów macierzy V wchodzi tylko różnice $\alpha_i - \beta_j$, pozwala to na wyeliminowanie $2n - 1$ faz. Zostaje

$$\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right) - (2n - 1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{2}{2} = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$$

Zatem macierz V ma

parametrów rzeczywistych: $\frac{1}{2}n(n-1) \rightarrow [U(2) = 1, U(3) = 3]$

faz: $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) \rightarrow [U(2) = 0, U(3) = 1]$

W teorii z dwoma generacjami mamy jeden kąt mieszania.

W teorii z trzema generacjami mamy 3 kąty i jedną fazę.

Faza daje przyczynek do łamania \mathcal{CP} .

Parametryzacja macierzy Cabbibo-Kobayashi-Maskawy (CKM)

$$\begin{aligned}
 V &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \\
 &\begin{bmatrix} e^{i\delta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

gdzie

$$s_{ij} = \sin \theta_{ij}, \quad c_{ij} = \cos \theta_{ij}$$

Mamy 3 kąty: θ_{12} , θ_{13} , θ_{23} oraz jedną fazę δ .

Parametryzacje macierzy Cabbibo-Kobayashi-Maskawy (CKM)

$$\begin{aligned}
 V &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \\
 &\begin{bmatrix} e^{i\delta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Jeżeli $\delta = 0$ lub $s_{13} = 0$ to macierz CKM V jest rzeczywista.

Także, jeżeli $s_{12} = 0$, to można V uczynić rzeczywistą redefiniując:

$$e^{i\delta}u \rightarrow u, \quad e^{i\delta}d \rightarrow d$$

Podobnie, jeżeli $s_{23} = 0$, to można V uczynić rzeczywistą redefiniując:

$$e^{-i\delta}t \rightarrow t, \quad e^{-i\delta}b \rightarrow b$$

Rzeczywiście, dla $s_{23} = 0$ oraz $c_{23} = 1$

$$\begin{bmatrix} u_L^\dagger, c_L^\dagger, t_L^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ -c_{12}s_{13}e^{i\delta} & -s_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{13} \end{bmatrix} \tilde{\sigma}^\mu \begin{bmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{bmatrix}$$

człony zawierające δ :

$$s_{13}e^{-i\delta} \left(u_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu b_L \right) - c_{12}s_{13}e^{i\delta} \left(t_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_L \right) - s_{12}s_{13}e^{i\delta} \left(t_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu s_L \right) + c_{13} \left(t_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu b_L \right)$$

Transformacja

$$e^{-i\delta}t \rightarrow t \quad (t^\dagger e^{-i\delta} \rightarrow t^\dagger), \quad e^{-i\delta}b \rightarrow b$$

eliminuje δ .

Parametr Jarlskog

Można utworzyć 9 kombinacji typu

$$J = \text{Im}(V_{ij}V_{kl}V_{kj}^*V_{il}^*) \quad i \neq k, j \neq l$$

które nie zależą od transformacji

$$V_{ij} \rightarrow e^{i(\alpha_i - \beta_j)} V_{ij}.$$

Rzeczywiście

$$J \rightarrow \text{Im}(e^{i(\alpha_i - \beta_j)} V_{ij} e^{i(\alpha_k - \beta_l)} V_{kl} e^{-i(\alpha_k - \beta_j)} V_{kj}^* e^{-i(\alpha_i - \beta_l)} V_{il}^*)$$

Na przykład

$$\text{Im}(V_{11}V_{22}V_{21}^*V_{12}) = c_{12}c_{13}^2c_{23}s_{12}s_{13}s_{23} \sin \delta$$

Jeżeli $J = 0$ to macierz V może być przekształcona do macierzy rzeczywistej.

Zostaje zatem globalna symetria pomnożenia wszystkich pól kwarkowych przez wspólną fazę (lewych i prawych) co generuje zachowanie liczby barionowej (całkowita liczba kwarków, a nie kwarków typu u lub d)

Wartości numeryczne macierzy CKM

$$|V_{CKM}| = \begin{bmatrix} \mathbf{0.97383} & \mathbf{0.2272} & \mathbf{0.00396} \\ \mathbf{0.2271} & \mathbf{0.97296} & \mathbf{0.04221} \\ \mathbf{0.00814} & \mathbf{0.04161} & \mathbf{0.999100} \end{bmatrix}$$

Parametryzacja Wolfensteina: cztery parametry $\lambda = \sin \theta_{12}$, ρ , η oraz A :

$$V_{CKM}^{\text{Wolfenstein}} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{bmatrix} + O(\lambda^4)$$

Ta parametryzacja wynika z unitarności.

$$V_{\text{CKM}}^\dagger V_{\text{CKM}} =$$

$$\begin{bmatrix} V_{ud}^* & V_{cd}^* & V_{td}^* \\ V_{us}^* & V_{cs}^* & V_{ts}^* \\ V_{ub}^* & V_{cb}^* & V_{tb}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_{ud}^* V_{ub} + V_{cd}^* V_{cb} + V_{td}^* V_{tb} = \mathbf{0}$$

$$V_{ud} V_{ub}^* + V_{cd} V_{cb}^* + V_{td} V_{tb}^* = \mathbf{0}$$

Mamy

$$1 + \frac{V_{td} V_{tb}^*}{V_{cd} V_{cb}^*} + \frac{V_{ud} V_{ub}^*}{V_{cd} V_{cb}^*} = \mathbf{0}$$

Suma trzech liczb zespolonych jest równa zero – trójkąt unitarny.

$$1 + \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} + \frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} = \mathbf{0}$$

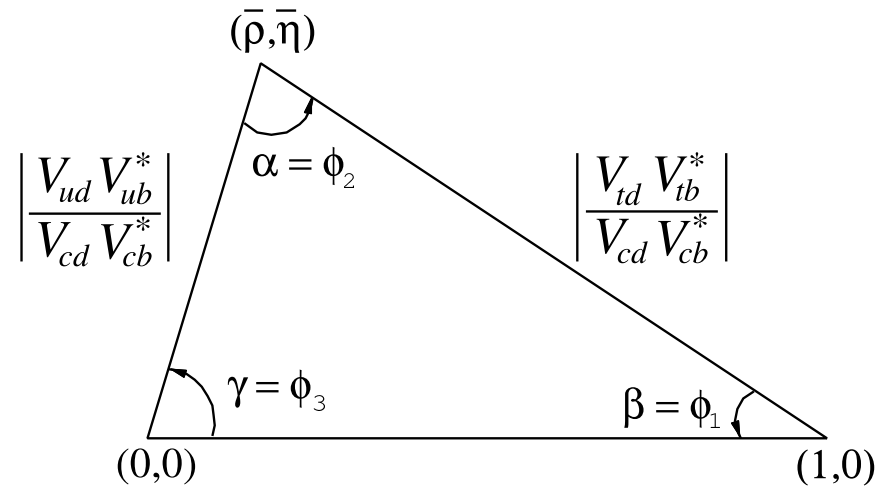


Figure 11.1: Sketch of the unitarity triangle.

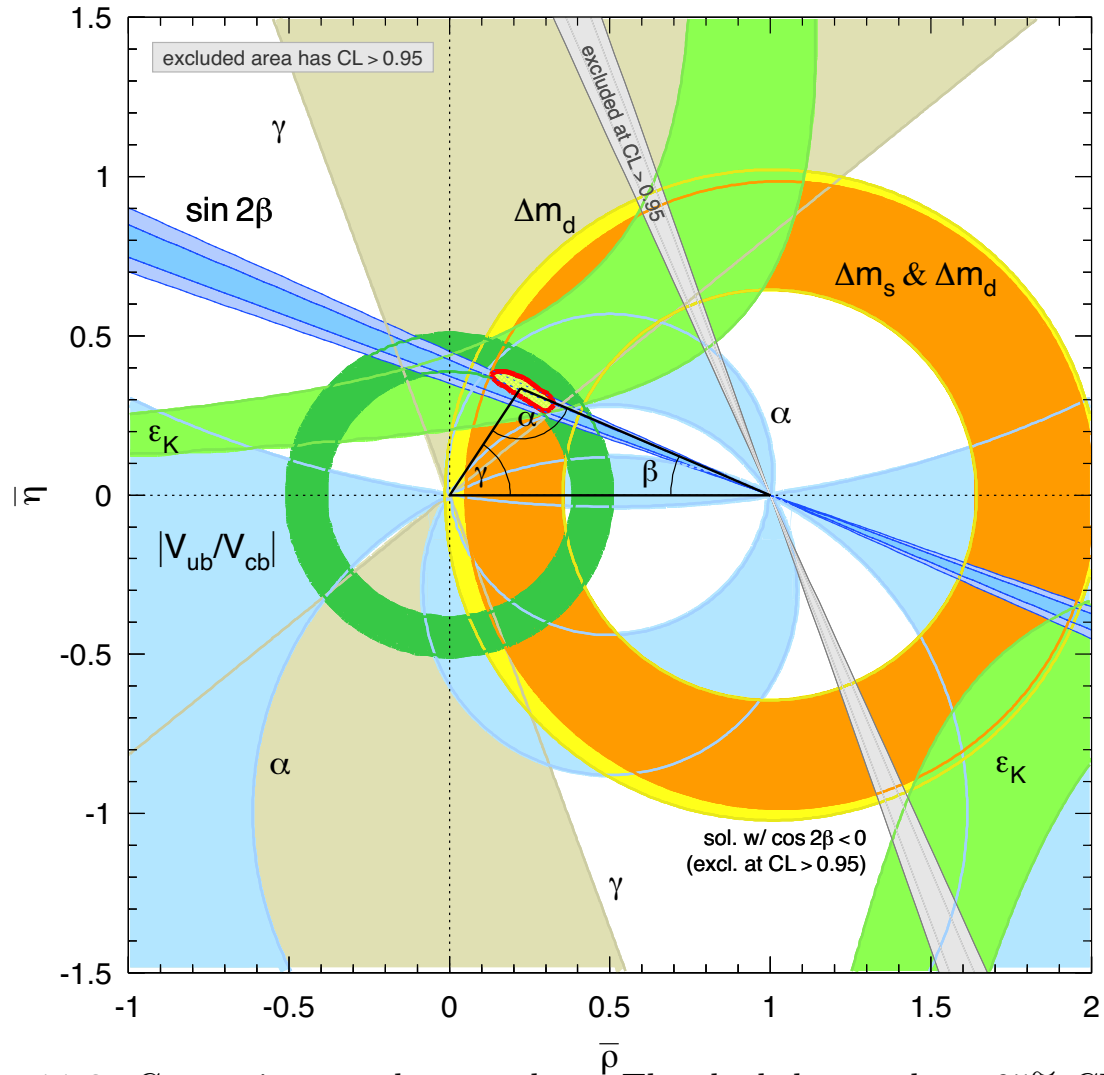


Figure 11.2: Constraints on the $\bar{\rho}, \bar{\eta}$ plane. The shaded areas have 95% CL. See full-color version on color pages at end of book.

Łamanie \mathcal{CP}

Zespolone V_{CKM} jest źródłem łamania \mathcal{CP} :

$$\begin{aligned} \psi_L^{\mathcal{CP}} &= -i\sigma^2\psi_L^* \\ \begin{bmatrix} W_0^3 & \sqrt{2}W_0^+ \\ \sqrt{2}W_0^- & -W_0^3 \end{bmatrix}^{\mathcal{CP}} &= - \begin{bmatrix} W_0^3 & \sqrt{2}W_0^- \\ \sqrt{2}W_0^+ & -W_0^3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \vec{W}^3 & \sqrt{2}\vec{W}^+ \\ \sqrt{2}\vec{W}^- & -\vec{W}^3 \end{bmatrix}^{\mathcal{CP}} &= + \begin{bmatrix} \vec{W}^3 & \sqrt{2}\vec{W}^- \\ \sqrt{2}\vec{W}^+ & -\vec{W}^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tożsamość

$$(\sigma^2)^2 = 1, \quad \sigma^2\sigma^k\sigma^2 = -(\sigma^k)^T.$$

Oddziaływanie

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{qW} &= -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} \sum \left[V_{ij} \left(u_{iL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu d_{jL} \right) W_\mu^+ + V_{ij}^\dagger \left(d_{iL}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu u_{jL} \right) W_\mu^- \right] \\ &\rightarrow +\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} \sum \left[V_{ij} \left(u_{iL}^T (\tilde{\sigma}^\mu)^T d_{jL}^* \right) W_\mu^- + V_{ij}^\dagger \left(d_{iL}^T (\tilde{\sigma}^\mu)^T u_{jL}^* \right) W_\mu^+ \right]. \end{aligned}$$

Trzeba przestawić pola fermionowe, co daje znak $-$:

$$\begin{aligned} &\rightarrow +\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\sum\left[V_{ij}\left(d_{jL}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu u_{iL}\right)W_\mu^-+V_{ij}^\dagger\left(u_{jL}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu u_{iL}\right)W_\mu^+\right] \\ &= +\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\sum\left[V_{ji}^*\left(u_{jL}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu u_{iL}\right)W_\mu^++V_{ji}^T\left(d_{jL}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu u_{iL}\right)W_\mu^-\right]\stackrel{?}{=} \mathcal{L}_qW \end{aligned}$$

Równość tylko gdy

$$V^* = V$$

Łamanie \mathcal{CP} obserwuje się w rozpadach K^0 (Cronin). Nie zachodzi dla prądów neutralnych.