Model Standardowy – teoria pola

Mechanika klasyczna – równania na wielkości takie jak pęd, energia położenie

Mechanika kwantowa – wielkości klasyczne $\rightarrow$ operatory, które działaja na funkcje falowe, interpretecja probabilistyczna

Teoria pola – funkcja falowa $\rightarrow$ operator pola
– niezmienniczość Lorentza (STW)
– niezachowanie liczby „cząstek"

Transformacja Lorentza

Czterowektory:

$$x^\mu = (ct, x, y, z), \ \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Transformacja Lorentza:

$$x'^\mu = L^\mu_{\ \nu} x^\nu$$

zachowuje interwał $(x^\mu + \Delta x^\mu)$ między *zdarzeniami*

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 = (\Delta s')^2$$

Tensor metryczny

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

pomaga zapisać to w zwartej formie

$$(\Delta s')^2 = g_{\mu\nu}\Delta x'^{\mu}\Delta x'^{\nu} = g_{\mu\nu}L^{\mu}_{\ \tau}L^{\nu}_{\ \rho}\Delta x^{\tau}\Delta x^{\rho} = g_{\tau\rho}\Delta x^{\tau}\Delta x^{\rho}$$

Transformacja Lorentza zachowuje tensor metryczny

$$g_{\mu\nu}L^{\mu}_{\ \tau}L^{\nu}_{\ \rho} = g_{\tau\rho}$$

Ponieważ tensor metryczny jest symetryczny jest to 10 równań. $L^{\mu}_{\ \nu}$ jest rzeczywistą macierzą 4×4 o 16 parametrach minus 10 warunków, co daje 6 niezależnych parametrów: 3 obroty i 3 „boosty".

$$1 = g_{00} = g_{\mu\nu}L^{\mu}_{\ 0}L^{\nu}_{\ 0} = (L^{0}_{\ 0})^2 - \sum_{i=1}^{3}(L^{i}_{\ 0})^2$$

co daje

$$(L^{0}_{\ 0})^2 > 1 \rightarrow L^{0}_{\ 0} > 1 \quad \text{lub} \quad L^{0}_{\ 0} < -1$$

Klasyfikacja transformacji Lorentza:

$\mathrm{sign} L^0_{\ 0}$	$\det L$	
$+$	$+1$	właściwe
$-$	-1	odbicie czasowe
$+$	-1	odbicie przestrzenne
$-$	$+1$	odbicie całkowite

Można łatwo pokazać

$$L^\mu_{\ \rho} L^\nu_{\ \mu} = L^\nu_{\ \mu} L^\mu_{\ \rho} = \delta^\nu_\rho .$$

Czterowektor energii i pędu:

$$p^\mu = (E, cp_x, cp_y, cp_z)$$
$$p^2 = E^2 - c^2 \vec{p}^2 = m^2 c^4 .$$

Stąd

$$E = \pm c \sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2} = \pm mc^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}} \simeq \pm \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \dots \right)$$

Równanie Schrödingera

Nierelatywistyczna mechanika kwantowa:

$$E \rightarrow \widehat{H} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \ \vec{p} \rightarrow \widehat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

$$\widehat{H}\psi(x,t) = \frac{\widehat{\vec{p}}^{\,2}}{2m}\psi(x,t) \qquad \uparrow \ \boxed{\text{zależnie od reprezentacji}}$$

wybieramy znak + i opuszczamy stałą.

$$E = \pm c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^{\,2}} = \pm mc^2\sqrt{1 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{m^2c^2}} \simeq \pm\left(mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \dots\right)$$

Równanie Kleina-Gordona

Jak skonstruować równanie odpowiadające pierwiastkowi? Klein i Gordon:

$$E^2 = c^2\vec{p}^2 + m^2c^4 \Longrightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x,t) = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2c^4\right)\varphi(x,t)$$

Są kłopoty interpretacyjne. W nierelatywistycznej mechanice kwantowej

$$P = \psi^*\psi \qquad \text{gęstość prawdopodobieństwa (dodatnia !!!!)}$$

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2im}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*) \quad \text{gęstość pradu prawdopodobieństwa}$$

spełniają równanie ciągłości

$$\frac{\partial}{\partial t}P + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0.$$

W przypadku równania Kleina-Gordona:

$$-\varphi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = \varphi^* \left(-c^2 \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \varphi$$

$$-\varphi \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi^* = \varphi \left(-c^2 \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right) \varphi^*$$

odejmujemy stronami

$$\text{Lewa strona} = -\left(\varphi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - \varphi \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi^* \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi^* \frac{\partial}{\partial t}\varphi - \varphi \frac{\partial}{\partial t}\varphi^* \right)$$

$$\text{Prawa strona} = -c^2 \left(\varphi^* \vec{\nabla}^2 \varphi - \varphi \vec{\nabla}^2 \varphi^* \right) = -c^2 \vec{\nabla} \cdot \left(\varphi^* \vec{\nabla} \varphi - \varphi \vec{\nabla} \varphi^* \right)$$

Mnożąc stronami przez

$$-\frac{\hbar}{2imc^2}$$

dostajemy równanie ciągłości z gęstością prawdopodobieństwa

$$P = -\frac{\hbar}{2imc} \left(\varphi^* \frac{\partial}{\partial t}\varphi - \varphi \frac{\partial}{\partial t}\varphi^* \right),$$

która nie jest odatnio określona (po pomnożeniu przez e można intepretować jako gęstość ładunku). Otrzymuje się złe spektrum atomu wodoru (Schrödinger).

Równania klasyczne można otrzymać z zasady wariacyjnej.

$$S = \int\limits_0^T dt \mathcal{L}(x, \dot{x})$$

Dokonajmy przesuniecia

$$x' = x + y, \ \dot{x}' = \dot{x} + \dot{y}, \ \text{gdzie } y(0) = y(T) = 0.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} S' &= \int\limits_0^T dt\, L(x', \dot{x}') = \int\limits_0^T dt\, L(x + y, \dot{x}' = \dot{x} + \dot{y}) \\ &= \int\limits_0^T dt \left(L(x, \dot{x}) + \frac{\partial L}{\partial x} y + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{y} + \dots \right). \end{aligned}$$

Stąd

$$\delta S = S' - S = \int\limits_0^T dt \left(\frac{\partial L}{\partial x} y + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{y} \right)$$

$$= \int\limits_0^T dt \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) y + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} y \Big|_0^T .$$

Stąd równania ruchu:

$$\delta S = 0 \Longrightarrow \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Zasada wariacyjna dla pola skalarnego

Dla funkcji skalarnej φ wprowadzamy *gęstość* lagrangianu $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$, gdzie $\varphi(t, \vec{r})$ (lokalność).

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi). \qquad x \to \varphi, \ \frac{dx}{dt} \to \partial_\mu \varphi.$$

$$\delta S = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = 0.$$

Jak wygląda $\mathcal{L}$ (przyjmujemy $\hbar = 1$ i $c = 1$)?

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2 \right) = \frac{1}{2} \left(g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \, \partial_\nu \varphi - m^2 \varphi^2 \right).$$

Zadanie: przeprowadzić jawnie rachunek wariacyjny dla pola φ i wstawić do $\hbar$ i c do $\mathcal{L}$.

Rozwiązania równania Kleina-Gordona.

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 - m^2\right)\varphi(t,\vec{r}) = 0.$$

Rozwiązanie falowe:

$$\varphi_k(t,\vec{r}) = a_k \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t + \theta_k\right)$$
$$\omega_k^2 = \vec{k}^2 + m^2.$$

Zamykając układ w pudle o długości l i objętości $V = l^3$ narzucając *periodyczne* warunki brzegowe mamy

$$\vec{k} = \left(\frac{2\pi n_1}{l}, \frac{2\pi n_2}{l}, \frac{2\pi n_3}{l}\right), \qquad n_{1,2,3} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ogólne rozwiązanie jest superpozycją takich fal

$$\varphi(t,\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\left(\frac{a_k}{\sqrt{2\omega_k}}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + \frac{a_k^*}{\sqrt{2\omega_k}}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}\right).$$

Czynnik $\sqrt{2\omega_k}$ jest konwencją (uwaga, ω_k może być dodatnie lub ujemne, wtedy trzeba wziąć moduł). Pole φ jest rzeczywiste.

Pole φ opisuje cząstkę skalarną (np. bozon Higsa lub mezon π^0).

Tensor energii-pędu.

W mechanice klasycznej energia (hamiltonian) dane są przez transformację Legendre'a

$$H = p\,\dot{q} - L$$

Zachowanie energii-pędu jest konsekwencją symetrii względem translacji (także czasowych):

$$x^\mu \to x^\mu + \delta a^\mu \quad \delta a^\mu \text{ nie zależy od } t \text{ i od } x$$

wtedy

$$\begin{aligned} \varphi\left(x^\mu + \delta a^\mu\right) &= \varphi(x) + \left(\partial_\nu \varphi(x)\right) \delta a^\nu \\ &\to \delta\varphi = \left(\partial_\nu \varphi(x)\right) \delta a^\nu \end{aligned}$$

i dalej

$$\delta\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\delta(\partial_\mu \varphi).$$

Używając r. ruchu

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \quad \text{oraz} \quad \delta(\partial_\mu \varphi) = \partial_\mu(\delta\varphi)$$

mamy

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \left[\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right]\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu(\delta\varphi) \\
&= \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi\right] = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\nu\varphi\right]\delta a^\nu.
\end{aligned}
$$

Z kolei

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\mathcal{L}\,\delta a^\mu = (\partial_\mu\mathcal{L})\ \delta a^\nu\delta^\mu_\nu$$

i w konsekwencji

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\nu\varphi - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}\right]\delta a^\nu = 0.$$

Ponieważ δa^ν są dowolne, mamy zachowanie wielkości

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0,\ \text{gdzie } T^\mu_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\nu\varphi - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}$$

jest tensorem energii-pędu. Podobnie jak w mechanice klasycznej energia (gęstość energii):

$$T^0_0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi}\partial\dot\varphi - \mathcal{L}.$$

Równanie $\partial_\mu T^\mu_\nu = 0$ przyjmuje postać dla $\nu = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} T^0_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{T} = 0,$$

gdzie

$$\vec{T} = (T^1_0, T^2_0, T^3_0).$$

Całkując po całej przestrzeni:

$$0 = \int d^3x \, \left(\frac{\partial}{\partial t} T^0_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{T} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x T^0_0 + \int_{\partial V \to \infty} d\vec{s} \cdot \vec{T} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x T^0_0$$

dostaliśmy prawo zachowania całkowitej energii pola skalarnego.

Składowe T^0_i mają interpretację gęstości pędu. podobnie mozna pokazać zachowanie pędu.

W przypadku pola Kleina-Gordona

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2 \right)$$

mamy

$$T^0_0 = \frac{1}{2} \left(\dot{\varphi}^2 + (\vec{\nabla} \varphi)^2 + m^2 \varphi^2 \right).$$

Podstawiając rozwiązania r. Kleina-Gordona mamy

$$\dot{\varphi} = -i\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\left(\omega_k \frac{a_k}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - \omega_k \frac{a_k^*}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}\right)$$

$$\vec{\nabla}\varphi = i\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\left(\vec{k} \frac{a_k}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - \vec{k} \frac{a_k^*}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}\right)$$

i używając wzoru

$$\frac{1}{V}\int d^3x\, e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

otrzymujemy

$$H = \int d^3x T_0^0 = \sum_{\vec{k}} \omega_k a_k^* a_k,$$

$$\vec{P} = \int d^3x \vec{T}^0 = \sum_{\vec{k}} \vec{k} a_k^* a_k.$$

Wyprowadzenie (weźmy rozwiązanie z dodatnimi $\omega_k = \omega$):

$$\int d^3x\dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{2V}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\sqrt{\omega\omega'}\int d^3x\times$$

$$a_k a_{k'} e^{i((\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r}-(\omega+\omega')t)} + a_k^* a_{k'}^* e^{-i((\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r}-(\omega+\omega')t)}$$

$$- a_k a_{k'}^* e^{i((\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}-(\omega-\omega)t)} - a_k^* a_{k'} e^{-i((\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}-(\omega-\omega)t)}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\omega\left(a_k a_{-k} e^{-2i\omega t} + a_k^* a_{-k}^* e^{+2i\omega t} - 2a_k a_k^*\right).$$

Podobnie:

$$\int d^3x(\vec{\nabla}\varphi)^2 = -\frac{1}{2V}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\frac{\vec{k}\cdot\vec{k}'}{\sqrt{\omega\omega'}}\int d^3x\times$$

$$a_k a_{k'} e^{i((\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r}-(\omega+\omega')t)} + a_k^* a_{k'}^* e^{-i((\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r}-(\omega+\omega')t)}$$

$$- a_k a_{k'}^* e^{i((\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}-(\omega-\omega)t)} - a_k^* a_{k'} e^{-i((\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}-(\omega-\omega)t)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\frac{k^2}{\omega}\left(a_k a_{-k} e^{-2i\omega t} + a_k^* a_{-k}^* e^{+2i\omega t} + 2a_k a_k^*\right),$$

gdzie $\vec{k}\cdot\vec{k}=k^2$. A także

$$\int d^3x\,\varphi^2 = \frac{1}{2V}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\frac{1}{\sqrt{\omega\omega'}}\int d^3x \times$$

$$a_k a_{k'} e^{i((\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r}-(\omega+\omega')t)} + a_k^* a_{k'}^* e^{-i((\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r}-(\omega+\omega')t)}$$

$$+ a_k a_{k'}^* e^{i((\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}-(\omega-\omega)t)} + a_k^* a_{k'} e^{-i((\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}-(\omega-\omega)t)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\omega}\left(a_k a_{-k} e^{-2i\omega t} + a_k^* a_{-k}^* e^{+2i\omega t} + 2a_k a_k^*\right).$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\int d^3x T^0_0 &= \frac{1}{2}\int d^3x \left(\dot{\varphi}^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{\vec{k}} \frac{-\omega^2 + k^2 + m^2}{\omega^2} \left(a_k a_{-k} e^{-2i\omega t} + a^*_k a^*_{-k} e^{+2i\omega t}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}} \frac{\omega^2 + k^2 + m^2}{\omega} a_k a^*_k \\
&= \sum_{\vec{k}} \omega_k a^*_k a_k,
\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że $\omega^2 = k^2 + m^2$ (warunek *on shell*) i wróciliśmy do oznaczenia $\omega = \omega_k$. Ważne, że skorzystaliśmy dwa razy z warunku *on shell*, raz żeby dostać zero i raz, żeby dostać czynik 2. Jak to będzie dla ujemnych energii?

Skalarne pole zespolone

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\,\phi_2\right)$$

Przekonamy się, że Φ ma ładunek q, a Φ^* ładunek $-q$. Gęstość lagrangianu (rzeczywista)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi$$

prowadzi do r. ruchu, gdzie pola Φ i Φ^* traktujemy jako *niezależne*:

$$-\partial_\mu \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi = 0$$

i analogicznie dla Φ^*. Zatem rozwiązania

$$\Phi(t, \vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{a_k}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + \frac{b_k^*}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right),$$

gdzie a_k i b_k są niezależnymi liczbami zespolonymi. Można pokazać, że energia

$$H = \sum_{\vec{k}} \omega_k \left(a_k^* a_k + b_k^* b_k \right)$$

(suma energii dwóch rzeczywistych pól skalarnych).