Logika i Teoria Mnogości, zestaw 5

5.1. Na zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ określamy następujące relacje:

(a) $xRy \Leftrightarrow x = 1$ lub $x = 4$

(b) $xRy \Leftrightarrow y - x = 1$ lub 5

(c) $xRy \Leftrightarrow x + y = 4 \mod 6$ lub $x + y = 6 \mod 6$.

Proszę wyznaczyć R^2, R^3, oraz R^4.

5.2. Proszę pokazać, że jeśli R jest relacją równoważności, to jest nią również R^n.

5.3. Proszę pokazać, że po to aby relacja była przechodnia potrzeba i wystarcza by $R^2 \subset R$.

5.4. Niech R, S będą relacjami równoważności. Proszę sprawdzić, czy są nimi również $R \cup S, R \cap S$ i $R - S$.

5.5. Dany jest zbiór X oraz $C \subset X$. Na $P(X)$ definiujemy relację

$$A\ R\ B \Leftrightarrow A - B \subseteq C.$$

Proszę pokazać, że jest to relacja równoważności i podać klasy abstrakcji.

5.6. Niech $f : X \to Y$ oraz niech $A \subset X$ i $B \subset Y$. Przez $f(A)$ oznaczamy obraz zbioru A, zaś przez $f^{-1}(B)$ przeciwobraz zbioru B ze względu na funkcje f. Proszę udowodnić wzory:

(a) jeśli $A_1 \subset A_2$, to $f(A_1) \subset f(A_2)$;

(b) jeśli $B_1 \subset B_2$, to $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;

(c) $f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)$ oraz $f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \setminus B_2)$;

(d) $ff^{-1}(B) \subset B$ oraz $A \subset f^{-1}f(A)$;

(e) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$;

(f) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ i $h = g \circ f$ to $h^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ dla każdego $C \subset Z$;

Proszę pokazać, że w powyższych wzorach znak inkluzji nie może być zastąpiony znakiem równości. Które znaki inkluzji mogą być zastąpione znakiem równości, gdy funkcja f jest różnowartościowa?

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl