Logika i Teoria Mnogości, zestaw 4

4.1. Dana jest pewna rodzina zbiorów. Proszę udowodnić, że należące do niej zbiory tworzą pierścień przemienny ze względu na działania $A - B$ i $A \cap B$, natomiast nie tworzą pierścienia ze względu na działania $A \cup B$ i $A \cap B$.

4.2. Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem. Mówimy, że zbiory A i B przystają modulo $\mathcal{I}$, co zapisujemy $A \wr B$ mod $\mathcal{I}$, jeśli $A - B \in \mathcal{I}$. Proszę udowodnić, że:

(a) $A \wr B \bmod \mathcal{I} \ \Leftrightarrow \ (A \setminus B) \in \mathcal{I} \wedge (B \setminus A) \in \mathcal{I}$

(b) jeśli $A_1 \wr B_1$ i $A_2 \wr B_2$, to $(A_1 \cup A_2) \wr (B_1 \cup B_2)$

(c) $A \wr B \bmod \mathcal{I} \ \Leftrightarrow \ A = (B \setminus P) \cup Q$, gdzie $P, Q \in \mathcal{I}$

Pomocne definicje:

Pierścień.
Mówimy, że zbiór A z działaniami $+, \cdot$ tworzą pierścień przemienny, jeśli spełnione są następujące warunki:
1) $\forall x, y \in A\colon x + y = y + x,\ x \cdot y = y \cdot x$
2) $\forall x, y, z \in A\colon x + (y + z) = (x + y) + z,\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
3) istnieje element $0 \in A$ taki, że $\forall x \in A\colon x + 0 = x$
4) dla dowolnych $x, y \in A$ istnieje element $z \in A$ taki, że $x + z = y$
5) $\forall x, y, z \in A\colon x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Ideał.
Rodzinę $\mathcal{I}$ podzbiorów danej przestrzeni X nazywamy ideałem jeśli spełnione są warunki;
1) jeśli $A \in \mathcal{I}$ i $B \subset A$, to $B \in \mathcal{I}$
2) jeśli $A \in \mathcal{I}$ i $B \in \mathcal{I}$, to $(A \cup B) \in \mathcal{I}$

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl