Mechanika kwantowa, zestaw 5

Kręt i moment pędu

5.1. Rozważamy cząstkę o spinie $s = 1$.

(a) Proszę wypisać postać wektora spinu $\vec{\mathsf{S}} = (\mathsf{S}_x, \mathsf{S}_y, \mathsf{S}_z)$ w bazie wektorów własnych operatora S_z.

(b) Cząstka znajduje się w stanie z $S_z = -\hbar$. Jakie wyniki możemy otrzymać mierząc dla niej wartości S_x? Z jakim prawdopodobieństwem?

(c) Niech cząstka będzie w stanie $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|+,z\rangle + \frac{1}{2}|0,z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-,z\rangle$, gdzie $|\pm,z\rangle$ i $|0,z\rangle$ są unormowanymi wektorami własnymi S_z do wartości własnych odpowiednio $\pm\hbar$ i 0. Jakie jest prawdopodobieństwo, że mierząc S_z^2 otrzymamy wartość $+\hbar^2$? Jaki jest stan cząstki po wykonaniu pomiaru, który przyniósł taki wynik? Jeśli teraz dokonamy pomiaru wartości S_z, to jakie wyniki (i z jakkim prawdopodobieństwem) możemy otrzymać?

(d) Proszę obliczyć wartość średnią operatora S_y w stanie $|\psi\rangle$.

5.2. Załóżmy, że cząstka jest w stanie $|l,m\rangle$, gdzie l jest wartością jej momentu pędu zaś m jego rzutu na oś z. Proszę pokazać, że

$$\langle \mathsf{L}_x\rangle \equiv \langle l,m|\mathsf{L}_x|l,m\rangle = 0, \quad \langle \mathsf{L}_y\rangle = 0, \quad \langle \mathsf{L}_x^2\rangle = \langle \mathsf{L}_y^2\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left[l(l+1) - m^2\right].$$

5.3. Rozpatrujemy bezspinową cząstkę o masie M, poruszającą się po sferze o jednostkowym promieniu. Jej hamiltonian ma postać

$$\mathsf{H} = \frac{1}{2M}\mathsf{L}^2$$

gdzie L^2 jest kwadratem operatora momentu pędu.

(a) Proszę zaproponować dla tego układu zupełny zbiór komutujących obserwabli.

(b) Niech w pewnej chwili czasu stan układu będzie opisany funkcję falową

$$\psi(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} + \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\cos 2\varphi.$$

Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia tej cząstki w obszarze $\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$?

(c) Jakie są możliwe wyniki pomiaru energii, kwadratu krętu i jego rzutu na oś z dla cząstki w stanie ψ z punktu 5.3b? Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania każdego z tych wyników?

5.4. Hamiltonian osiowo symetrycznego rotatora m postać:

$$\mathsf{H} = \frac{1}{2I_1}\left(\mathsf{L}_x^2 + \mathsf{L}_y^2\right) + \frac{1}{2I_2}\mathsf{L}_z^2.$$

(a) Proszę wyznaczyć spektrum energetyczne rotatora.

(b) W przypadku gdy $I_1 = 5I_2$ proszę podać 10 pierwszych poziomów energetycznych rotatora (uwzględniając degeneracje).

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl