Mechanika kwantowa, zestaw 3

Spin, równanie Pauliego

3.1. Niech $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ będą dowolnymi wektorami. Proszę pokazać, że

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}),$$
$$\mathrm{Tr}(\vec{\sigma} \cdot \vec{A}) = 0,$$

a następnie obliczyć $\mathrm{Tr}[(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B})(\vec{\sigma} \cdot \vec{C})]$.

3.2. Elektron poruszający się wzdłuż osi x ma energię $E = 1.5$ keV. Prawdopodobieństwo pomiaru rzutu spinu na oś z o wartości $\hbar/2$ wynosi 0.2, zaś o rzucie $-\hbar/2$ wynosi 0.8.

(a) Jaka jest funkcja falowa opisująca ten elektron?

(b) Jakie są wartości liczby falowej k i częstości ω tego elektronu?

3.3. Rozważmy spinowe stopnie swobody elektronu. Niech $|+\rangle$ oznacza spin o rzucie $S_z = \hbar/2$, zaś $|-\rangle$ o rzucie $S_z = -\hbar/2$. Operator Hamiltona działa na stany bazowe według wzorów $\hat{H}|+\rangle = \hbar\omega|-\rangle, \hat{H}|-\rangle = \hbar\omega|+\rangle$.

(a) Proszę zapisać reprezentację macierzową $\hat{H}$ w bazie $|\pm\rangle$.

(b) Znaleźć wartości i wektory własne hamiltonianu.

(c) Jeżeli w chwili $t = 0$ elektron jest w stanie $|+\rangle$, to jakie jest prawdopodobieństwo, że w późniejszej chwili t będzie w stanie $|-\rangle$?

3.4. W tym zadaniu pokażemy, że żadna oś kwantyzacji dla rzutu spinu nie jest wyróżniona. W tym celu definiujemy operator $\hat{S}_{\vec{n}} = \vec{S} \cdot \vec{n} = \hat{S}_x n_x + \hat{S}_y n_y + \hat{S}_z n_z$, gdzie $\vec{S} = \hbar\vec{\sigma}/2$ to wektor macierzy Pauliego, zaś $\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$ to jednostkowy wektor wskazujący w dowolnym kierunku, sparametryzowany kątami θ, ϕ.

(a) Proszę wypisać postać macierzy $\hat{S}_{\vec{n}}$ w bazie wektorów własnych $|+\rangle, |-\rangle$ operatora S_z.

(b) Proszę znaleźć wartości własne operatora $\hat{S}_{\vec{n}}$ oraz udowodnić, że jego wektory własne są postaci

$$|\vec{n}, +\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|-\rangle, \quad |\vec{n}, +\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|+\rangle - \cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|-\rangle.$$

(c) Proszę sprawdzić ortonormalność wektorów a następnie pokaać, że redukują się one do wektorów własnych operatorów $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$, gdy wektor jednostkowy wskazuje kierunki x, y, z.

(d) Przypuśćmy, że przez odpowiednio dobrany aparat Sterna-Gerlacha dokonano pomiaru rzutu spin atomu, w wyniku którego jest on w stanie $|\vec{n}, +\rangle$, gdzie $\vec{n}$ leży w płaszczyźnie xy. Jeżeli teraz atom przejdzie przez drugi aparat, który mierzy składową spinu wzdłuż osi x, to jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania składowej rzutu spinu na oś x równej $+\hbar/2$?

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl