

TEORETYCZNE PODSTAWY INFORMATYKI

20/10/2017

WFAiS UJ, Informatyka Stosowana
I rok studiów, I stopień

Wykład 3

2

Złożoność
obliczeniowa
algorytmów

- Notacja „wielkie O ”
- Notacja Ω i Θ
- *Algorytm Hornera*
- *Przykłady rzędów złożoności*
- *Klasy złożoności algorytmów*
- *Funkcje niewspółmierne*
- *Analiza czasu działania algorytmu*
 - ▣ *Instrukcje proste; instrukcje warunkowe; bloki instrukcji*
- *Efektywność algorytmu*

Złożoność obliczeniowa

3

- **Złożoność obliczeniowa:**
 - ▣ Jest to miara służąca do porównywania efektywności algorytmów.
 - ▣ Mamy dwa kryteria efektywności:
 - Czas,
 - Pamięć
- Do oceny efektywności stosujemy jednostki logiczne wyrażające związek między rozmiarem danych N (wielkość pliku lub tablicy) a ilością czasu T potrzebną na ich przetworzenie.

Złożoność asymptotyczna

4

- Funkcja wyrażająca zależność między N a T jest zwykle bardzo skomplikowana, a jej obliczenie ma znaczenie jedynie w odniesieniu do dużych rozmiarów danych
- Przybliżona miara efektywności to tzw. **złożoność asymptotyczna**.

Które człony są ważne?

5

$$\text{Funkcja: } f(n) = n^2 + 100n + \log_{10} n + 1000$$

| n | f(n) | n^2 | $100 \cdot n$ | $\log_{10} n$ | 1000 |
|----------|-------------|-------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-------------|
| 1 | 1 101 | 0.1% | 9% | 0.0% | 91% |
| 10 | 2 101 | 4.8% | 48% | 0.05% | 48% |
| 100 | 21 002 | 48% | 48% | 0.001% | 4.8% |
| 10^3 | 1 101 003 | 91% | 9% | 0.0003% | 0.09% |
| 10^4 | | 99% | 1% | 0.0% | 0.001% |
| 10^5 | | 99.9% | 0.1% | 0.0% | 0.0000% |

- n – rozmiar danych,
- $f(n)$ – ilość wykonywanych operacji

Dla dużych wartości n funkcja rośnie jak n^2 , pozostałe składniki mogą być zaniedbane.

Notacja „wielkie O”

6

Definicja:

$f(n)$ jest $O(g(n))$, jeśli istnieją liczby dodatnie c i n_0 takie że:
 $f(n) < c \cdot g(n)$ dla wszystkich $n \geq n_0$.

Przykład:

□ $f(n) = n^2 + 100n + \log_{10} n + 1000$

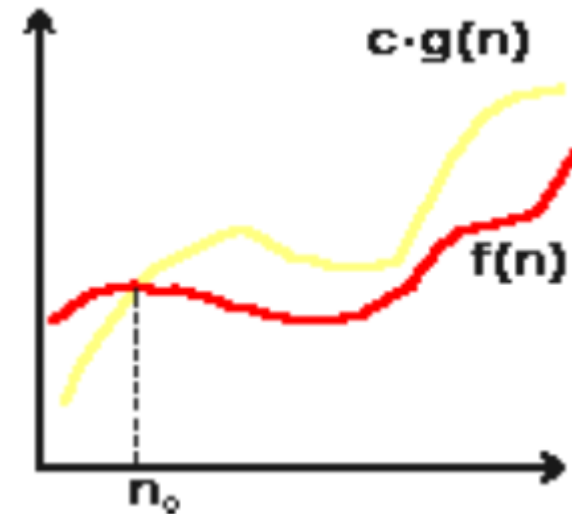
możemy przybliżyć jako:

$$f(n) \approx n^2 + 100n + O(\log_{10} n)$$

albo jako:

$$f(n) \approx O(n^2)$$

- Notacja „wielkie O” ma kilka pozytywnych własności które możemy wykorzystać przy szacowaniu efektywności algorytmów.



Własności notacji „wielkie O”

7

- **Własność 1** (przechodność):
 - Jeśli $f(n)$ jest $O(g(n))$ i $g(n)$ jest $O(h(n))$, to $f(n)$ jest $O(h(n))$
- **Własność 2:**
 - Jeśli $f(n)$ jest $O(h(n))$ i $g(n)$ jest $O(h(n))$, to $f(n)+g(n)$ jest $O(h(n))$
- **Własność 3:**
 - Funkcja an^k jest $O(n^k)$
- **Własność 4:**
 - Funkcja n^k jest $O(n^{k+i})$ dla dowolnego dodatniego i

Własności notacji „wielkie O”

8

- Z tych wszystkich własności wynika, że dowolny wielomian jest „wielkie O” dla n podniesionego do najwyższej w nim potęgi, czyli :

$$f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0 \text{ jest } O(n^k)$$

(jest też oczywiście $O(n^{k+i})$ dla dowolnego dodatniego i)

Własności notacji „wielkie O”

9

□ Własność 5:

□ Jeśli $f(n) = c g(n)$, to $f(n)$ jest $O(g(n))$

□ Własność 6:

□ Funkcja $\log_a n$ jest $O(\log_b n)$ dla dowolnych a i b większych niż 1

□ Własność 7:

□ $\log_a n$ jest $O(\log_2 n)$ dla dowolnego dodatniego a

Własności notacji „wielkie O”

10

- Jedną z najważniejszych funkcji przy ocenianiu efektywności algorytmów jest **funkcja logarytmiczna**.
- Jeżeli można wykazać że złożoność algorytmu jest rzędu logarytmicznego, algorytm można traktować jako bardzo dobry.
- Istnieje wiele funkcji lepszych w tym sensie niż logarytmiczna, jednak zaledwie kilka spośród nich, jak **$O(\log_2 \log_2 n)$** czy **$O(1)$** ma praktyczne znaczenie.

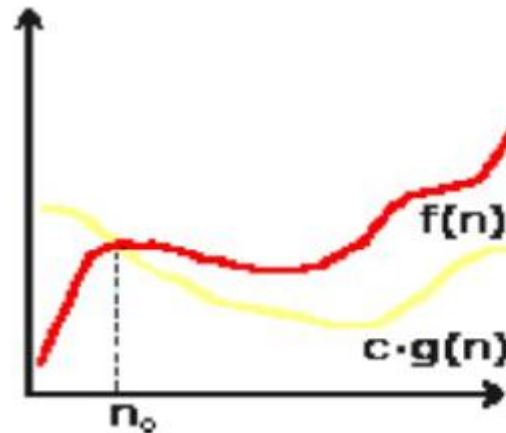
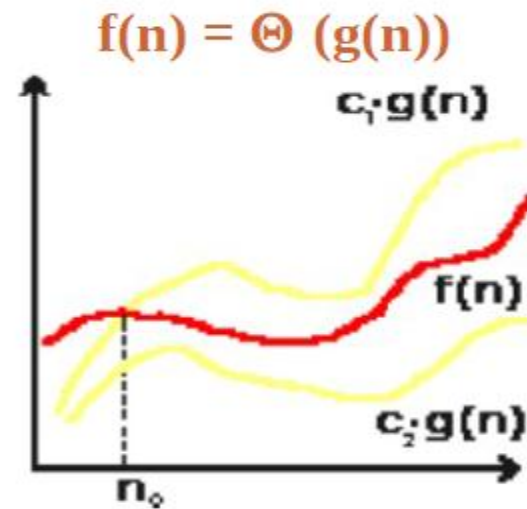
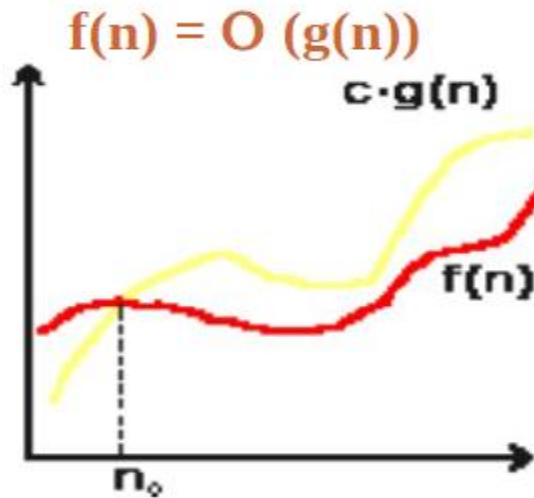
Notacja Ω i Θ

11

- Notacja „**wielkie O** ” odnosi się do górnych ograniczeń funkcji. Istnieje symetryczna definicja dotycząca dolnych ograniczeń
- Definicja
 - ▣ $f(n)$ jest **$\Omega(g(n))$** , jeśli istnieją liczby dodatnie c i n_0 takie że, $f(n) \geq c g(n)$ dla wszystkich $n \geq n_0$.
- Równoważność
 - ▣ $f(n)$ jest **$\Omega(g(n))$** wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n)$ jest $O(f(n))$
- Definicja
 - ▣ $f(n)$ jest **$\Theta(g(n))$** , jeśli istnieją takie liczby dodatnie c_1 , c_2 i n_0 takie że, $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ dla wszystkich $n \geq n_0$.

Notacja O , Ω i Θ

12



$f(n) = \Omega(g(n))$

Algorytm Hornera

13

- Załóżmy, że mamy policzyć wartość wielomianu postaci:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

dla danych liczb a_0, a_1, \dots, a_n , w danym punkcie x_0 .

- Algorytm polegający na **bezpośrednim liczeniu** ze wzoru wymaga **n dodawań** i **$(n-2)$ potęgowań** lub **$(2n-1)$ mnożeń** co w wyniku daje niedokładności (błąd względny i bezwzględny).
 - Warto poszukać innego rozwiązania.

Algorytm Hornera

14

Przedstawiamy wielomian w postaci:

$$f(x) = (\dots((a_0x + a_1)x + a_2)x + \dots + a_{n-1})x + a_n$$

to otrzymujemy następującą metodę na obliczanie wielomianu:

$$b_0 = a_0$$

$$b_1 = b_0x_0 + a_1$$

$$b_2 = b_1x_0 + a_2$$

$$b_n = b_{n-1}x_0 + a_n$$

gdzie b_i oznacza wartość i -tego nawiasu dla x równego x_0 , a b_n szukaną wartość wielomianu

Algorytm Hornera

15

- Otrzymana metoda to tzw. **Algorytm Hornera** obliczania wartości wielomianu.
- Algorytm ten jest numerycznie poprawny i jest jedynym algorytmem który minimalizuje liczbę dodawań i mnożeń przy obliczaniu wartości wielomianu wg. podanej postaci.

O czym należy pamiętać

16

- Celem wprowadzonych wcześniej sposobów zapisu (notacji) jest porównanie efektywności rozmaitych algorytmów zaprojektowanych do rozwiązania tego samego problemu.
- Jeżeli będziemy stosować tylko notacje „wielkie O” do reprezentowania złożoności algorytmów, to niektóre z nich możemy zdyskwalifikować zbyt po prostu.

Pamiętaj o dużych stałych

17

Przykład:

- ❑ Załóżmy, że mamy dwa algorytmy rozwiązujące pewien problem, wykonywana przez nie liczbą operacji to odpowiednio 10^8n i $10n^2$. Pierwsza funkcja jest $O(n)$, druga $O(n^2)$.
- ❑ Opierając się na informacji dostarczonej przez notację „**wielkie O**” odrzucilibyśmy drugi algorytm ponieważ funkcja kosztu rośnie zbyt szybko.
- ❑ To prawda ... ale dopiero dla odpowiednio dużych n , ponieważ dla $n < 10^7$ drugi algorytm wykonuje mniej operacji niż pierwszy.
- ❑ Istotna jest więc też stała (10^8), która w tym przypadku jest zbyt duża aby notacja była znacząca.

Przykłady rzędów złożoności

18

- Algorytmy można klasyfikować ze względu na złożoność czasową lub pamięciową.
- W związku z tym wyróżniamy wiele klas algorytmów.
 - **Algorytm stały:** czas wykonania pozostaje taki sam niezależnie od ilości przetwarzanych elementów.
 - **Algorytm kwadratowy:** czas wykonania wynosi $O(n^2)$.
 - **Algorytm logarytmiczny:** czas wykonania wynosi $O(\log n)$.
 - itd ...
- **Analiza złożoności algorytmów** jest niezmiernie istotna i nie można jej lekceważyć argumentując potencjalną szybkością obliczeń komputera. Nie sposób jej przecenić szczególnie zastanawiając się nad doborem struktury danych.

Najczęstsze złożoności

19

- **$\log(n)$** – złożoność logarytmiczna
- **n** – złożoność liniowa
- **$n \log(n)$** – złożoność liniowo-logarytmiczna
- **n^k** – złożoność wielomianowa
- **2^n** – złożoność wykładnicza
- **$n!$** – złożoność wykładnicza ponieważ $n! > 2^n$ już dla $n=4$.

Klasy złożoności algorytmów

20

- Czasy wykonania logarytmów na komputerze działającym z szybkością 1 instrukcja / μs .

| klasa | złożoność | liczba operacji i czas wykonania | | | |
|----------------------|-------------|----------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------------|
| | | n | 10 | | 10³ |
| stały | $O(1)$ | 1 | 1 μs | 1 | 1 μs |
| logarytmiczny | $O(\log n)$ | 3.32 | 3 μs | 9.97 | 10 μs |
| liniowy | $O(n)$ | 10 | 10 μs | 10 ³ | 1ms |
| kwadratowy | $O(n^2)$ | 10 ² | 100 μs | 10 ⁶ | 1s |
| wykładniczy | $O(2^n)$ | 1024 | 10ms | 10 ³⁰¹ | >> 10 ¹⁶ lat |

Funkcje niewspółmierne

21

- Bardzo wygodna jest możliwość porównywania dowolnych funkcji $f(n)$ i $g(n)$ za pomocą notacji „wielkie O ”

- albo $f(n) = O(g(n))$

- albo $g(n) = O(f(n))$

Albo jedno i drugie czyli $f(n) = \Theta(g(n))$.

- Istnieją pary funkcji niewspółmiernych (ang. incommensurate), z których żadne nie jest „wielkim O ” dla drugiej.

Funkcje niewspółmierne

22

□ Przykład:

Rozważmy funkcję $f(n)=n$ dla nieparzystych n oraz $f(n)=n^2$ dla parzystych n .

- Oznacza to, że $f(1)=1$, $f(2)=4$, $f(3)=3$, $f(4)=16$, $f(5)=5$ itd...
- Podobnie, niech $g(n)=n^2$ dla nieparzystych n oraz $g(n)=n$ dla parzystych n .
- W takim przypadku, funkcja $f(n)$ nie może być $O(g(n))$ ze względu na parzyste argumenty n , analogicznie $g(n)$ nie może być $O(f(n))$ ze względu na nieparzyste elementy n .
Obie funkcje mogą być ograniczone jako $O(n^2)$.

Analiza czasu działania programu

23

- Mając do dyspozycji definicję „**wielkie O**” oraz własności (1)-(7) będziemy mogli, wg. kilku prostych zasad, skutecznie analizować czasy działania większości programów spotykanych w praktyce.
- Efektywność algorytmów ocenia się przez szacowanie ilości czasu i pamięci potrzebnych do wykonania zadania, dla którego algorytm został zaprojektowany.
- Najczęściej jesteśmy zainteresowani **złożonością czasową**, mierzoną zazwyczaj liczbą przypisań i porównań realizowanych podczas wykonywania programu.
- Bardzo często interesuje nas tylko **złożoność asymptotyczna**, czyli czas działania dla dużej ilości analizowanych zmiennych.

Czas działania instrukcji prostych

24

- Przyjmujemy zasadę że czas działania pewnych prosty operacji na danych wynosi $O(1)$, czyli jest niezależny od rozmiaru danych wejściowych.
 - ▣ **Operacje arytmetyczne**, np. (+), (-)
 - ▣ **Operacje logiczne** (&&)
 - ▣ **Operacje porównania** (<=)
 - ▣ **Operacje dostępu do struktur danych**, np. indeksowanie tablic (A[i])
 - ▣ **Proste przypisania**, np. kopiowanie wartości do zmiennej.
 - ▣ Wywołania **funkcji bibliotecznych**, np. `scanf` lub `printf`
- Każdą z tych operacji można wykonać za pomocą pewnej (niewielkiej) liczby rozkazów maszynowych.

Czas działania pętli „for”

25

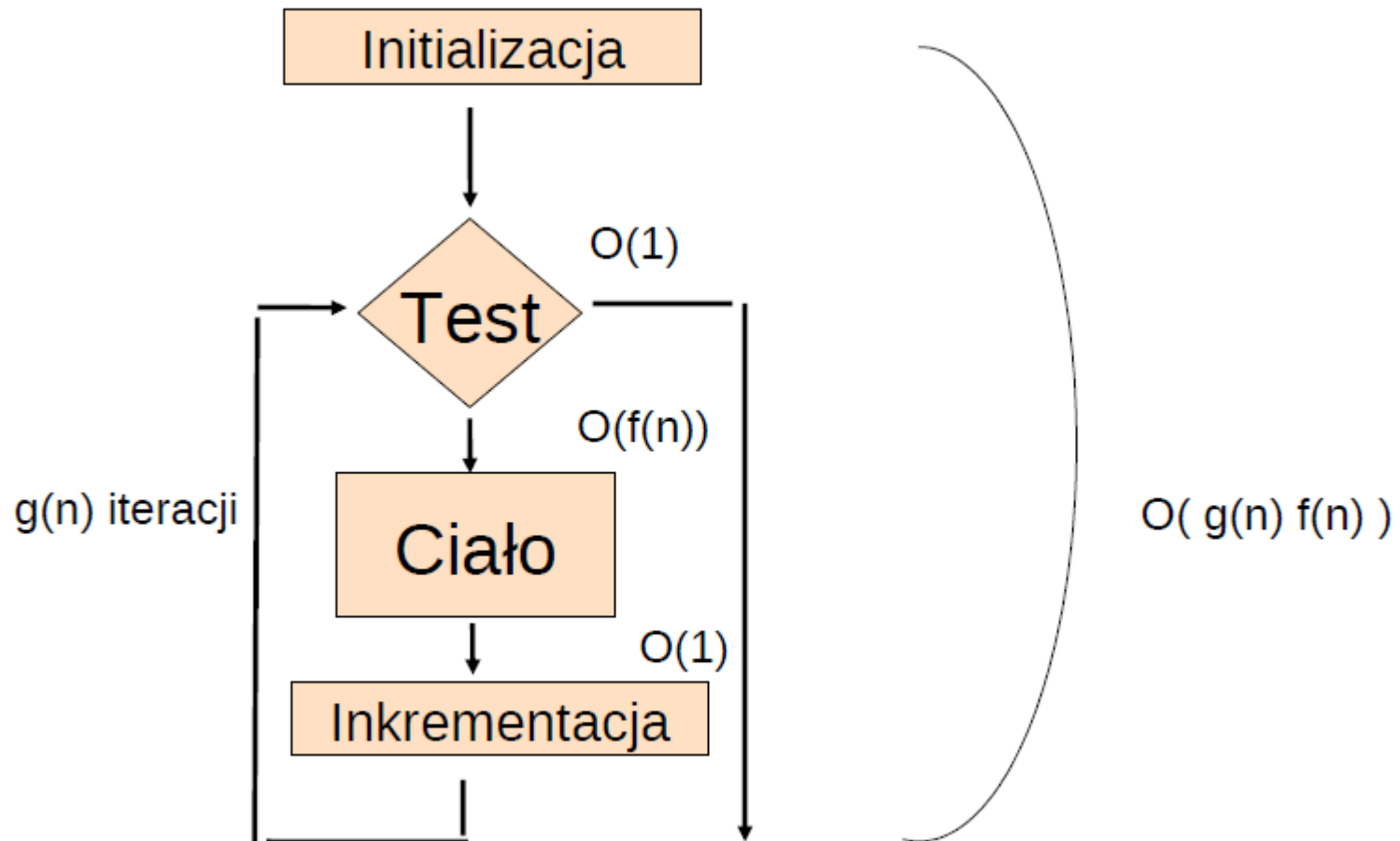
- **Przykład 1:** Prosta pętla

```
for (i=sum=0; i<n; i++) sum+=a[i];
```

- Powyższa pętla powtarza się n razy, podczas każdego jej przebiegu realizuje **dwa przypisania**:
 - aktualizujące zmienną „sum”
 - zmianę wartości zmiennej „i”
- Mamy zatem **$2n$** przypisań podczas całego wykonania pętli.
- Złożoność asymptotyczna algorytmu jest **$O(n)$** .

Czas działania pętli „for”

26



Czas działania pętli „for”

27

- **Przykład 2:** Pętla zagnieżdżona

```
for (i=0; i<n; i++) {  
    for (j=1, sum=a[0]; j<=i; j++)  
        sum+=a[j]; }
```

- **Pętla zewnętrzna powtarza się n razy**, a w każdej jej iteracji wykonuje się wewnętrzna pętla oraz instrukcja przypisania wartości zmiennym „i”, „j”, „sum”.
- **Pętla wewnętrzna wykonuje się „i” razy** dla każdego $i \in \{1, \dots, n-1\}$, a na każdą iterację przypadają dwa przypisania: jedno dla „sum”, jedno dla „j”.
- Mamy zatem: $1+3n+2(1+2+\dots+n-1) = 1+3n+n(n-1) = O(n)+O(n^2) = O(n^2)$ przypisań wykonywanych w całym programie.
- **Złożoność asymptotyczna algorytmu jest $O(n^2)$** . Pętle zagnieżdżone mają zwykle większą złożoność niż pojedyncze, jednak nie musi tak być zawsze.

Czas działania pętli „for”

28

- **Przykład 3:** Znajdź najdłuższą podtablicę zawierającą liczby uporządkowane rosnąco.

```
for (i=0; len=1; i<n-1; i++) {  
    for (i1=i2=k=i; k<n-1 && a[k]<a[k+1]; k++,i2++);  
    if(len < i2-i1+1) len=i2-i1+1; }
```

- Jeśli liczby w tablicy są uporządkowane malejąco, to pętla zewnętrzna wykonuje się **$n-1$ razy**, a w każdym jej przebiegu pętla wewnętrzna wykona się tylko **1-raz**.

Złożoność asymptotyczna algorytmu jest więc $O(n)$.

- Jeśli liczby w tablicy są uporządkowane rosnąco, to pętla zewnętrzna wykonuje się **$n-1$ razy**, a w każdym jej przebiegu pętla wewnętrzna wykona się **i -razy** dla $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Złożoność asymptotyczna algorytmu jest więc $O(n^2)$.

Czas działania pętli „for”

29

- Z reguły dane nie są uporządkowane i ocena złożoności algorytmu jest rzeczą niełatwą ale bardzo istotną.
- Staramy się wyznaczyć złożoność
 - w „przypadku optymistycznym”,
 - w „przypadku pesymistycznym”
 - oraz w „przypadku średnim”
- Często posługujemy się przybliżeniami opartymi o notacje „*wielkie O, Ω i Θ* ” .

Czas działania instrukcji warunkowych

30

Instrukcje warunkową **if-else** zapisuje się w postaci:

```
if (<warunek>
    <blok-if>
else
    <blok-else>
```

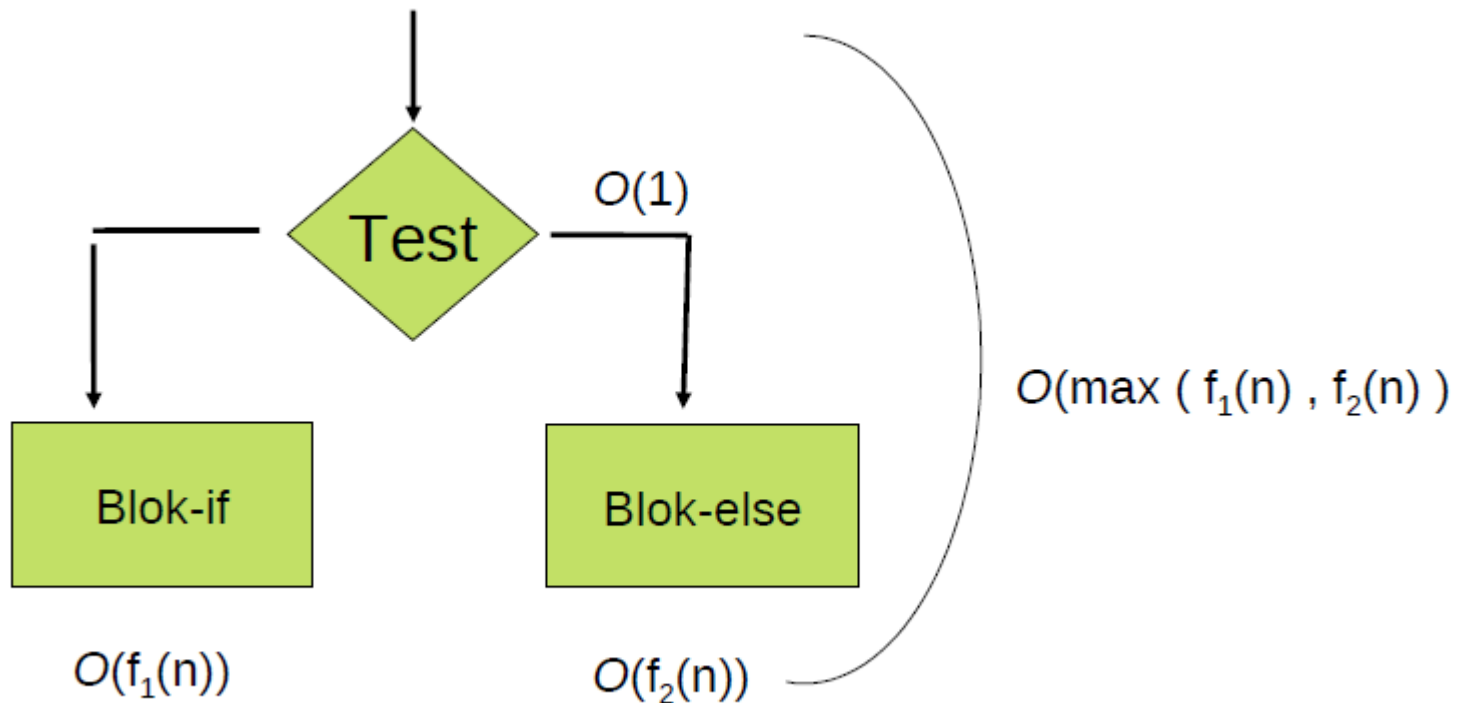
Gdzie

- **<warunek>** jest wyrażeniem które trzeba obliczyć. Warunek niezależnie od tego jak skomplikowany wymaga wykonania stałej liczby operacji (więc czasu $O(1)$) chyba że zawiera wywołanie funkcji, .
- **<blok-if>** zawiera instrukcje wykonywane tylko w przypadku gdy warunek jest prawdziwy, czas działania $f(n)$.
- **<blok-else>** wykonywany jest tylko w przypadku gdy warunek jest fałszywy, czas działania $g(n)$.

Czas działania instrukcji warunkowej należy zapisać jako $O(\max(f(n), g(n)))$

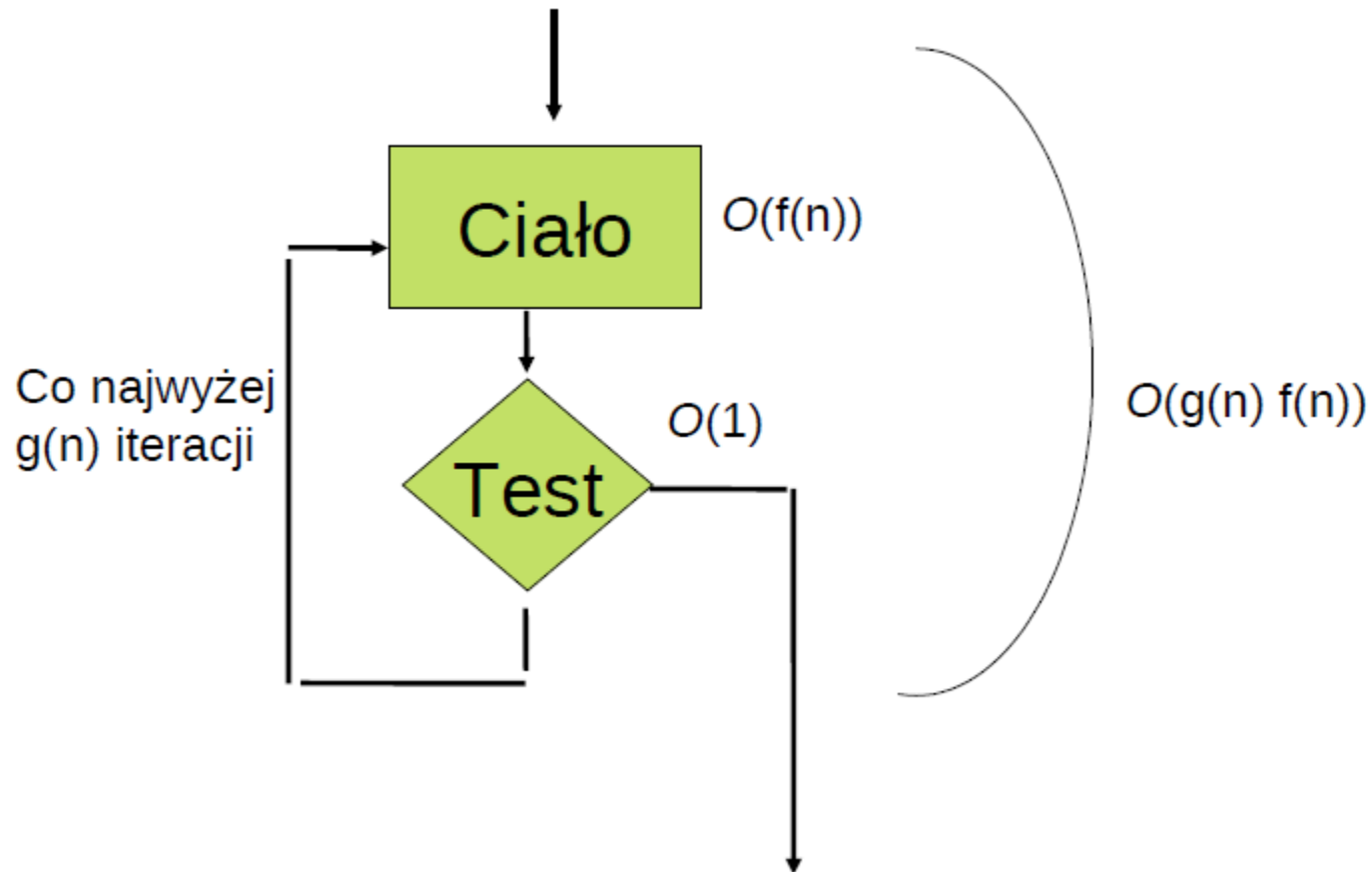
Czas działania instrukcji „if”

31



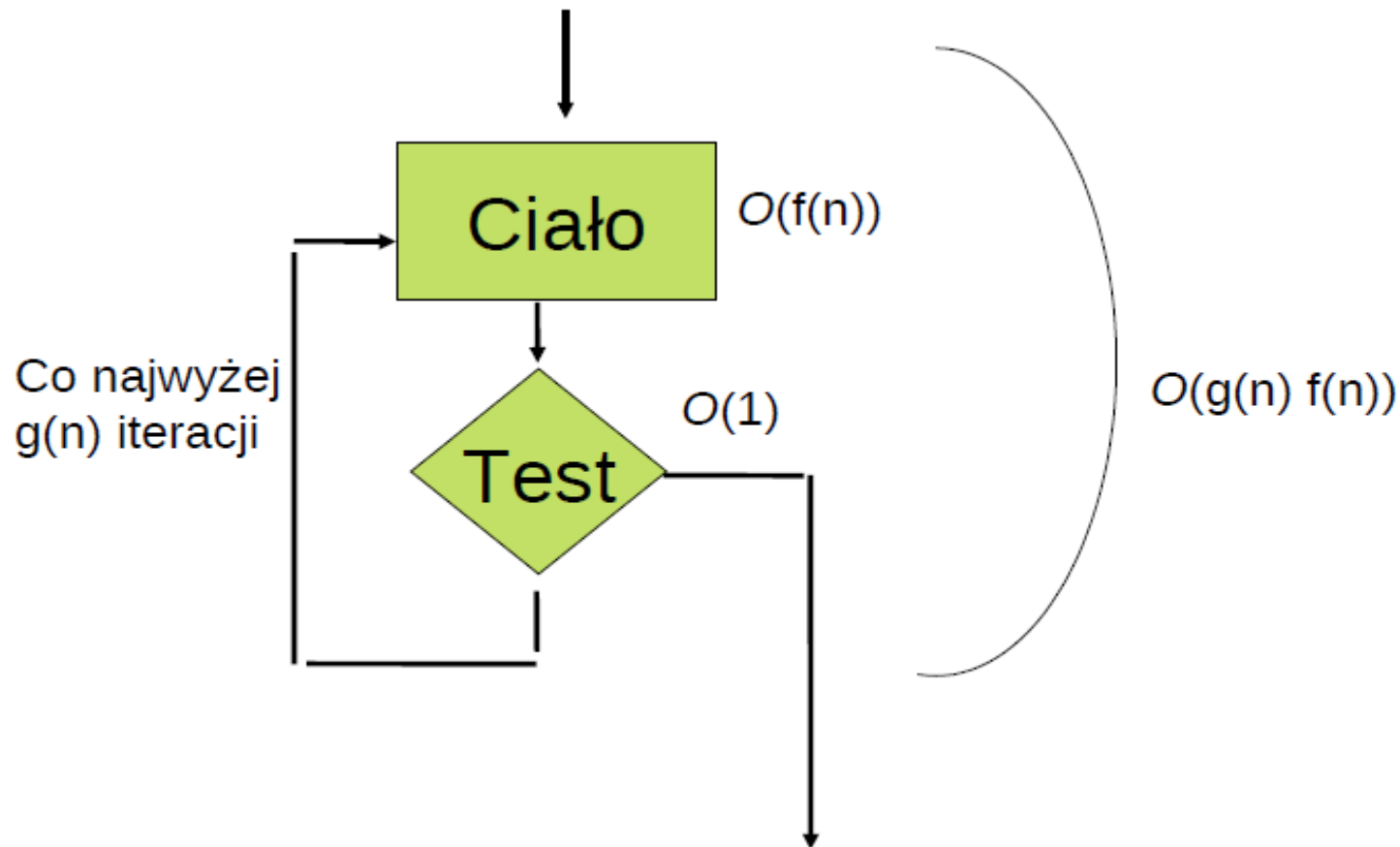
Czas działania instrukcji „while”

32



Czas działania instrukcji „do while”

33



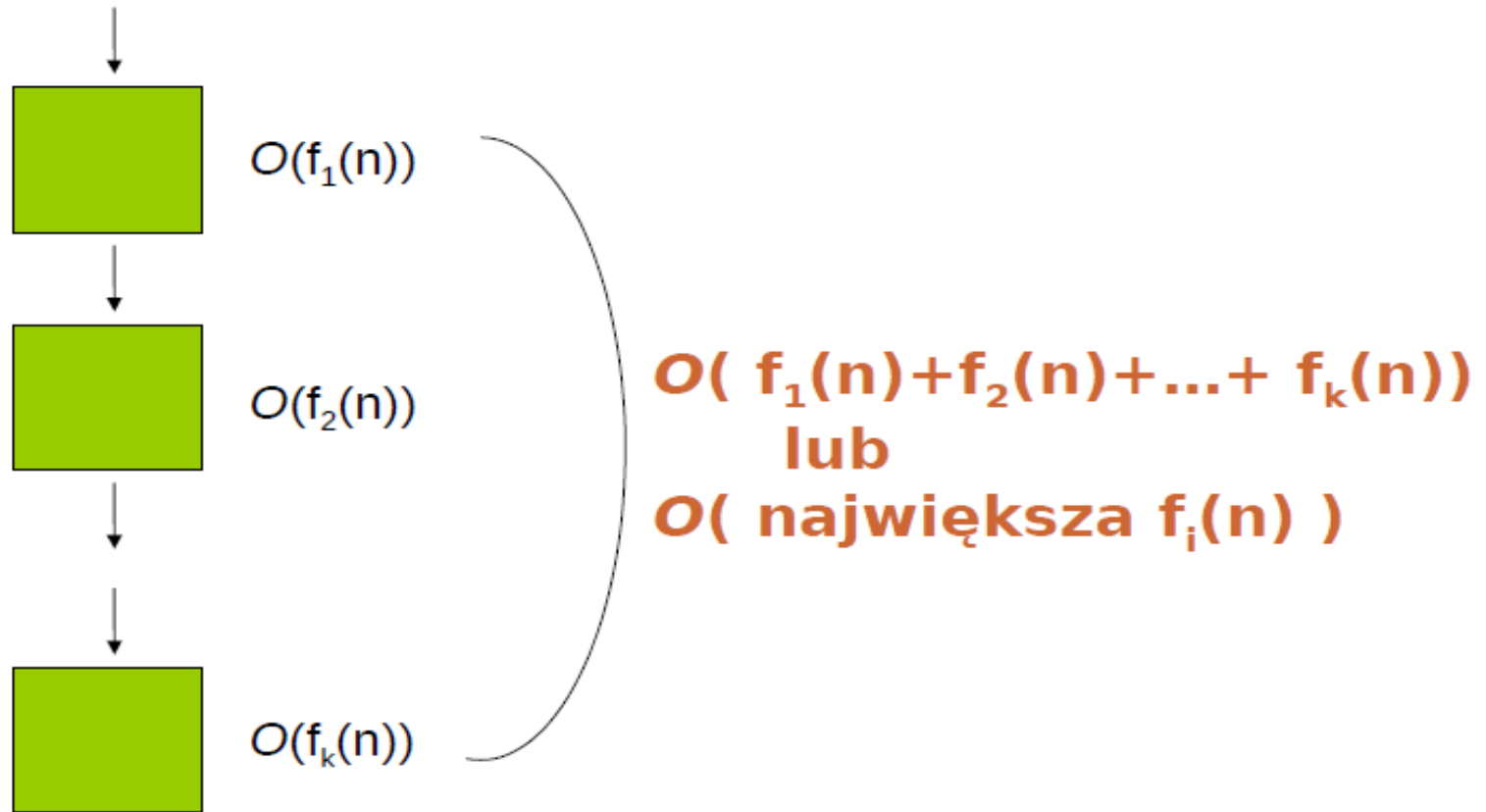
Czas działania bloków

34

- Sekwencja instrukcji przypisań, odczytów i zapisów, z których każda wymaga czasu $O(1)$, potrzebuje do swojego wykonania łącznego czasu $O(1)$.
- Pojawiają się również instrukcje złożone, jak instrukcje warunkowe i pętle.
 - ▣ **Sekwencję** prostych i złożonych **instrukcji** nazywa się **blokiem**.
- Czas działania bloku obliczymy sumując górne ograniczenia czasów wykonania poszczególnych instrukcji, które należą do tego bloku.

Czas działania bloku instrukcji

35

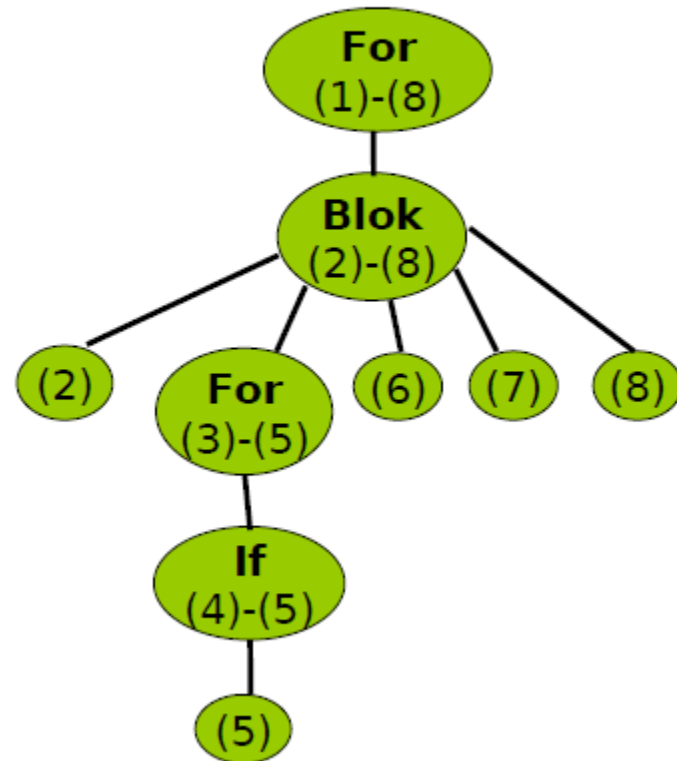


Przykład: „sortowanie przez wybieranie”

36

Drzewo reprezentujące grupowanie instrukcji

```
(1) for (i=0; i< n-1; i++ ) {  
(2)   small = i;  
(3)   for (j=i+1; j<n; j++ )  
(4)     if( A[j] < A[small] )  
(5)       small =j;  
(6)   temp = A[small];  
(7)   A[small] = A[i];  
(8)   A[i] = temp; }
```



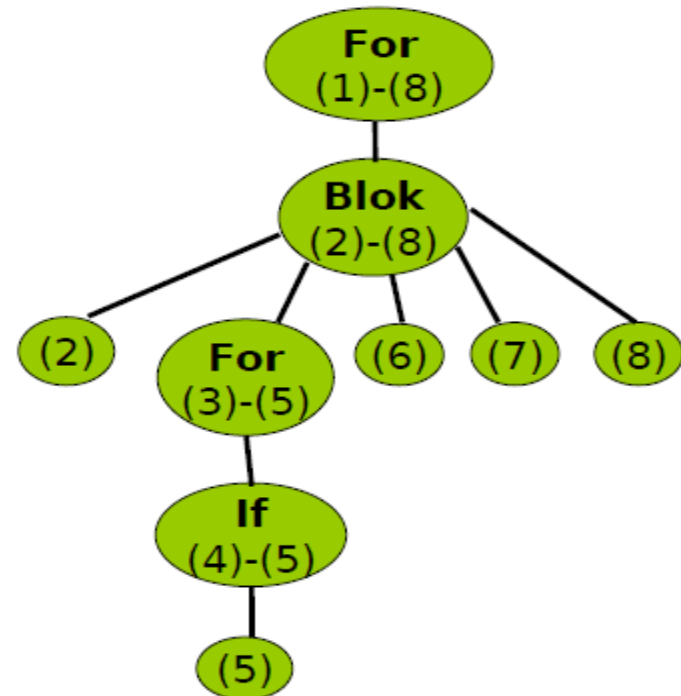
Przykład: „sortowanie przez wybieranie”

37

- Rozpoczynamy analizę „od liścia do korzenia”
 - Każda instrukcja przypisania (liście) wymaga czasu $O(1)$
 - Instrukcja „if” (4-5) wymaga czasu $O(1)$
 - Instrukcja „for” (3)-(5) wymaga czasu $O(n-i-1)$ oraz $i < n$
 - Instrukcja „for” (2)-(8) może być dalej ograniczona przez $O(n-1)$
 - Instrukcja „for” (1)-(8) może być ograniczona przez $O(n(n-1))$

Odrzucając wyraz mniej znaczący otrzymujemy oszacowanie czasu działania jako $O(n^2)$.

Drzewo reprezentujące grupowanie instrukcji



Przybliżone lub precyzyjne ograniczenie

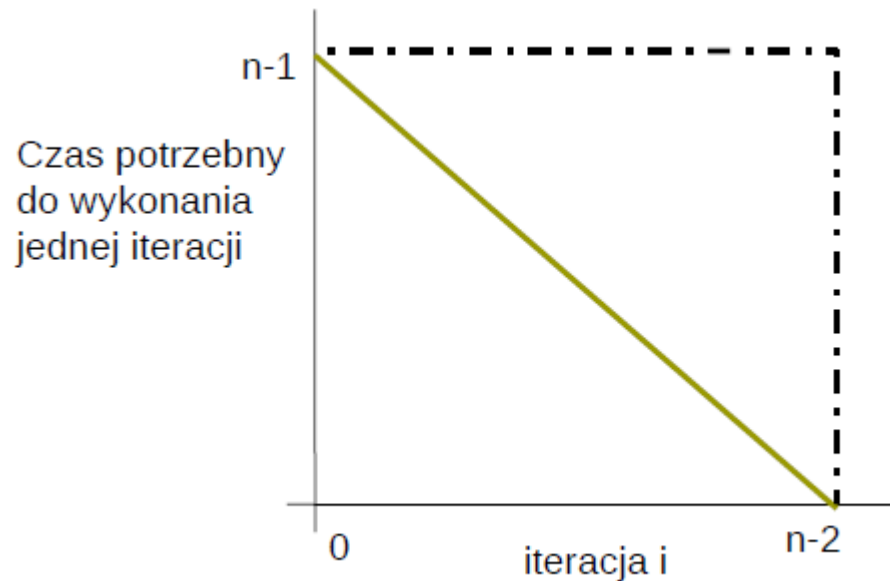
38

- Dotychczas rozważaliśmy szacowanie czasu działania pętli używając ujednoczonego górnego ograniczenia, mającego zastosowanie w każdej iteracji pętli.
- Dla sortowania przez wybieranie, takie przybliżone ograniczenie prowadziło do szacowania czasu wykonania pętli $O(n^2)$.
- Można jednak dokonać bardziej szczegółowej analizy pętli i dokonać sumowania górnych ograniczeń poszczególnych iteracji. Część działania pętli z wartością i zmiennej indeksowej i wynosi $O(n-i-1)$, gdzie i przyjmuje wartości od 0 do $n-2$.
- Górne ograniczenie czasu niezbędne do wykonania wszystkich iteracji wynosi:

$$O\left(\sum_{n=0}^{n-2} (n-i-1)\right) = O(n(n-1)/2)$$

Przybliżone lub precyzyjne ograniczenie

39



- Górne ograniczenie czasu niezbędne do wykonania wszystkich iteracji wynosi:

$$O\left(\sum_{n=0}^{n-2} (n-i-1)\right) = O(n(n-1)/2)$$

Efektywność algorytmu

40

□ Czas działania:

- Oznaczamy przez funkcję **$T(n)$** liczbę jednostek czasu, które zajmuje wykonanie programu lub algorytmu w przypadku problemu o rozmiarze **n** .
- Funkcje te nazywamy **czasem działania**. Dość często czas działania zależy od konkretnych danych wejściowych, nie tylko ich rozmiaru. W takim przypadku, funkcje **$T(n)$** definiuje się jako **najmniej korzystny przypadek** z punktu widzenia kosztów czasowych. Inną wyznaczaną wielkością jest też **czas średni**, czyli średni dla różnych danych wejściowych.

Nie przejmuj się efektywnością algorytmu...

41

- **Nie przejmuj się efektywnością algorytmu... wystarczy poczekać kilka lat.**
- Taki pogląd funkcjonuje czasem w środowisku programistów, **nie określono przecież granicy rozwoju mocy obliczeniowych komputerów.**
- Nie należy się jednak z nim zgadzać w ogólności.
- Należy zdecydowanie przeciwstawiać się przekonaniu o tym, że ulepszenia sprzętowe uczynią pracę nad efektywnymi algorytmami zbyteczną.

Nie przejmuj się efektywnością algorytmu...

42

- Istnieją problemy których rozwiązanie za pomocą zasobów komputerowych **jest teoretycznie możliwe**, ale **praktycznie przekracza możliwości istniejących technologii**.
Przykładem takiego problemu jest rozumienie języka naturalnego, przetwarzanie obrazów (do pewnego stopnia oczywiście) czy “inteligentna” komunikacja pomiędzy komputerami a ludźmi na rozmaitych poziomach.
- Kiedy pewne problemy stają się “proste”... Nowa grupa wyzwań, które na razie można sobie tylko próbować wyobrażać, **wytyczy nowe granice możliwości wykorzystania komputerów**.

Uwagi końcowe

43

- Na wybór najlepszego algorytmu dla tworzonego programu wpływa wiele czynników, najważniejsze to:
 - **prostota,**
 - **łatwość implementacji**
 - **efektywność**
- Do problemu systematycznej analizy czasu działania programu powrócimy jeszcze na wykładzie za kilka tygodni...

Pytania do wykładu

44

1. Podaj definicję notacji: „wielkie O ”, Ω , Θ .
2. Podaj własności notacji „wielkie O ”.
3. Wymień znane Ci klasy złożoności algorytmu.
4. Co to są funkcje niewspółmierne? Podaj przykład.
5. Co to jest złożoność obliczeniowa średnia? Uzasadnij pojęcie dla dowolnie wybranego algorytmu.
6. Co to jest złożoność obliczeniowa asymptotyczna? Uzasadnij pojęcie dla dowolnie wybranego algorytmu.