

TEORETYCZNE PODSTAWY INFORMATYKI

21/12/2015

WFAiS UJ, Informatyka Stosowana
I rok studiów, I stopień

Wykład 10, part I

2

Wzorce,
automaty

- Definicja
- Grafy reprezentujące maszyny stanów
- Symulacje automatów
- Automaty deterministyczne
- Automaty niedeterministyczne
 - ▣ Przejście do automatu deterministycznego
- Minimalizacja automatów

Wzorce i automaty

3

- Problematyka wzorców stanowi bardzo rozwiniętą dziedzinę wiedzy. Nosi ona nazwę teorii automatów lub teorii języków, a jej podstawowe definicje i techniki stanowią istotną część informatyki.
- Poznamy **trzy równoważne opisy wzorców**:
 - **oparty na teorii grafów**, polegać będzie na wykorzystaniu ścieżek w grafie szczególnego rodzaju który nazwiemy automatem.
 - **o charakterze algebraicznym**, wykorzystujący notacje wyrażeń regularnych.
 - **oparty o wykorzystanie definicji rekurencyjnych**, nazwany gramatyką bezkontekstową.

Wzorzec

4

- **Wzorzec** to zbiór obiektów o pewnej rozpoznawalnej właściwości.
- Jednym z typów wzorców jest zbiór ciągów znaków, taki jak zbiór poprawnych identyfikatorów języka C, z których każdy stanowi ciąg znakowy, składający się z liter, cyfr i znaków podkreślenia oraz rozpoczyna się od litery lub znaku podkreślenia.
- Inny przykład to zbiór tablic zer i jedynek o danym rozmiarze, które czytnik znaków może interpretować jako reprezentację tego samego symbolu. Poniżej trzy tablice które można interpretować jako literę A.
- Zbiór wszystkich takich tablic stanowiłby wzorzec o nazwie „A”.

```
0 0 0 1 0 0 0
0 0 1 1 1 0 0
0 0 1 0 1 0 0
0 1 1 0 1 1 0
0 1 1 1 1 1 0
1 1 0 0 0 1 1
1 0 0 0 0 0 1
```

```
0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0
0 0 1 1 0 0 0
0 1 0 1 0 0 0
0 1 1 1 0 0 0
1 0 0 1 1 0 0
1 0 0 0 1 0 0
```

```
0 0 0 1 0 0 0
0 0 1 0 1 0 0
0 1 1 0 1 0 0
0 1 1 1 1 1 0
1 1 0 0 0 1 1
1 0 0 0 0 0 1
0 0 0 0 0 0 0
```

Maszyny stanów i automaty

5

- Programy służące do wyszukiwania wzorców często charakteryzują się szczególną strukturą. W kodzie można identyfikować określone pozycje, w których można wyróżnić pewne charakterystyczne elementy związane z postępowaniem programu w zakresie osiągnięcia stawianego mu celu, jakim jest znalezienie wystąpienia wzorca.
- Takie pozycje określa się mianem stanów (ang. states). Ogólne zachowanie programu można postrzegać jako przechodzenie od jednego stanu do drugiego w miarę odczytywania danych wejściowych.

Przykład

6

- Prosty program w języku C, sprawdzający ciąg znaków w celu określenia czy zawiera on wszystkie pięć samogłosek w kolejności alfabetycznej. Rozpoczynając analizę od początku ciągu znaków, program najpierw wyszukuje znak a.
- Można powiedzieć że pozostaje w stanie 0 do czasu, aż znajdzie wystąpienie a, a wówczas przechodzi do stanu 1. W stanie 1, szuka wystąpienia znaku e, a kiedy je znajdzie, przechodzi do stanu 2... Stan i można interpretować jako sytuacje, w której program napotkał już po kolei i pierwszych samogłosek, gdzie $i=0, 1, \dots, 5$.
- Owe sześć stanów stanowi całość wymaganych przez program informacji podczas przeglądania ciągu wejściowego od lewej do prawej strony.

Przykład

7

```
#include <stdio.h>
#define TRUE 1
#define FALSE 0
typedef int BOOLEAN;
```

```
BOOLEAN testWord(char *p) {
    /* stan 0 */
    if (findChar(&p, 'a'))
        /* stan 1 */
        if (findChar(&p, 'e'))
            /* stan 2 */
            if (findChar(&p, 'i'))
                /* stan 3 */
                if (findChar(&p, 'o'))
                    /* stan 4 */
                    if (findChar(&p, 'u'))
                        /* stan 5 */
                        return TRUE;
    return FALSE; }
```

```
BOOLEAN findChar( char **pp, char c)
{
    while (**pp != c && **pp != '\0')
        (*pp)++;
    if( **pp == '\0')
        return FALSE;
    else {
        (*pp) ++;
        return TRUE;
    }
}
```

```
main()
{
    printf(“%d\n”, testWord(“abstemious”))
}
```

Grafy reprezentujące maszyny stanów

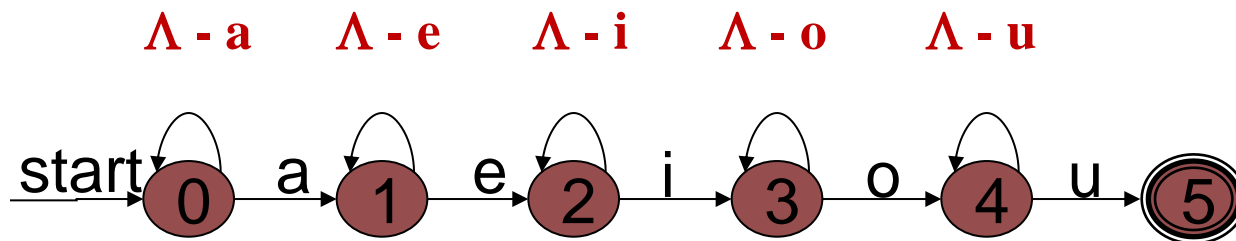
8

- Działanie omówionego programu można reprezentować za pomocą **grafu**, którego **wierzchołki określają stany programu**.
- I odwrotnie: program można zaprojektować przez zaprojektowanie w pierwszej kolejności grafu, a następnie mechaniczne przetłumaczenie takiego grafu na program (ręcznie lub przy pomocy istniejących narzędzi programistycznych).
- Koncepcja działania automatu jest prosta. Zakłada się że **automat pobiera listę znaków zwaną ciągiem wejściowym** (ang. input sequence).
- Jego działanie rozpoczyna się w stanie początkowym, tuż przed odczytaniem pierwszego znaku wejściowego. W zależności od tego jaki jest to znak, automat wykonuje przejście – do tego samego lub innego stanu.
- **Przejścia są zdefiniowane przez graf automatu**. Następnie automat odczytuje drugi znak i wykonuje kolejne przejście i tak dalej.

Automat rozpoznający ciągi liter

9

- Stany programu są reprezentowane za pomocą grafu skierowanego, którego krawędzie etykietuje się zbiorami znaków. Krawędzie takie nazywa się przejściami (ang. transition).
- Niektóre wierzchołki są zaznaczone jako stany końcowe (ang. accepting states). Osiągnięcie takiego stanu oznacza znalezienie poszukiwanego wzorca i jego akceptację.
- Jeden z wierzchołków jest zawsze określany jako stan początkowy (ang. start state) – stan w którym następuje rozpoczęcie procesu rozpoznawania wzorca. Wierzchołek taki oznacza się przez umieszczenie prowadzącej do niego strzałki która nie pochodzi od innego wierzchołka. Graf posiadający opisywaną postać nosi nazwę automatu skończonego (ang. finite automaton) lub po prostu automatu.



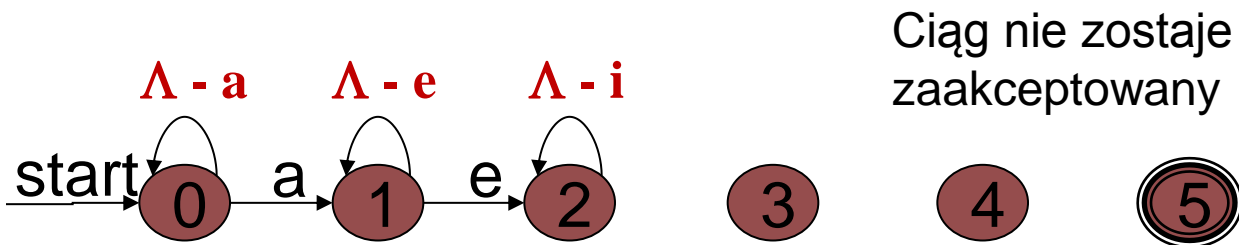
Symulacja automatu

10

- Jedną z podstawowych operacji wykonywanych za pomocą automatu jest pobranie ciągu symboli a_1, a_2, \dots, a_k i przejście od stanu początkowego ścieżką, której krawędzie posiadają etykiety zawierające te symbole po kolei.
- Tzn. dla $i = 1, 2, \dots, k$ symbol a_i należy do zbioru S_i , który etykietuje i -tą krawędź ścieżki.
- Konstruowanie takiej ścieżki oraz sekwencji jej kolejnych stanów określa się mianem symulacji (ang. simulation) automatu dla ciągu wejściowego a_1, a_2, \dots, a_k .
- O takiej ścieżce mówi się że posiada etykietę a_1, a_2, \dots, a_k .

Symulacja działania automatu

11

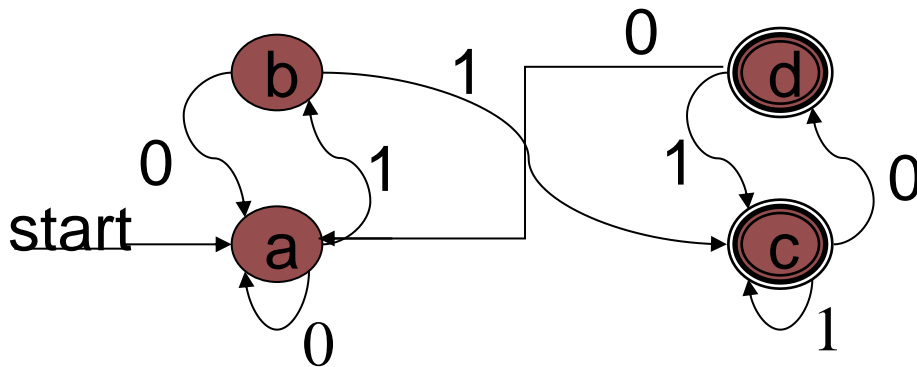


| | | | | | | |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| Wejście: | | a | d | e | p | t |
| Stan: | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |

Filtr odbijający

12

- Automat pobiera ciąg zer i jedynek.
- Celem jego jest „wygładzenie” ciągu przez traktowanie pojedynczego symbolu 0, który jest otoczony dwoma symbolami 1 jako „szumu” i zastąpienie go symbolem 1.
- W podobny sposób jest traktowany symbol 1 gdy jest otoczony dwoma symbolami 0 – zastępujemy go symbolem 0.
- Stanem początkowym jest a. Stanami końcowymi (akceptującymi) są c i d.



| Wejście | Stan | Wyjście |
|---------|------|---------|
|---------|------|---------|

| | | |
|---|---|---|
| 0 | a | 0 |
| 1 | a | 0 |
| 0 | b | 0 |
| 1 | b | 0 |
| 0 | c | 1 |
| 1 | c | 1 |
| 0 | d | 1 |
| 1 | d | 1 |

Różnica pomiędzy automatami a ich programami

13

- **Automaty stanowią abstrakcje.** Podejmują decyzje o akceptacji lub odrzuceniu danego ciągu znaków wejściowych przez sprawdzenie, czy istnieje ścieżka od stanu początkowego do pewnego stanu końcowego, której krawędzie będą zaetykietowane wartościami ciągu.
- Działanie filtru można interpretować jako fakt że **automat odrzuca** podciągi: **0,01,010,0101** natomiast **akceptuje** podciągi **01011, 010110, 0101101**.
- Działanie automatu rozpoznającego litery jest takie że akceptuje ciągi znaków, takich jak „abstemiou”, ale odrzuca ciąg „abstemious”, ponieważ nie da się przejść nigdzie ze stanu 5 w przypadku końcowego znaku s.

Różnica pomiędzy automatami a ich programami

14

- **Programy tworzone dla automatów mogą podejmować decyzje o akceptacji lub odrzuceniu na różne sposoby.**
- Przykładowo program akceptujący ciągi znaków i wykorzystujący automat ze slajdu 7 powinien zaakceptować zarówno słowo „abstemious” jak i „abstemiou”.
- W momencie przetworzenia litery u program wypisywałby całe słowo bez dalszego badania go.
- Program wykorzystujący automat ze slajdu 9 powinien interpretować każdy stan akceptacji jako akcję polegającą na wypisaniu znaku 1, zaś każdy stan odrzucenia jako akcję polegającą na wypisaniu znaku 0.

Automaty deterministyczne

15

- Można z łatwością przerobić automat deterministyczny na program.
- Dla każdego stanu tworzy się fragment kodu. Kod **stanu s** bada znak wejściowy i określa, które (o ile jakiegokolwiek) przejście ze **stanu s** powinno zostać wybrane.
- Jeżeli zostanie wybrane przejście ze **stanu s** do **stanu t**, to kod napisany dla stanu s musi uwzględniać przekazanie sterowania do kodu stanu t, np. przy użyciu instrukcji go to.

Funkcja implementująca automat deterministyczny

16

```
void bounce()
{
    char x;

    /* stan a */
a: putchar('0');
   x = getchar();
   if ( x == '0') goto a:
   if ( x == '1') goto b:
   goto finis;

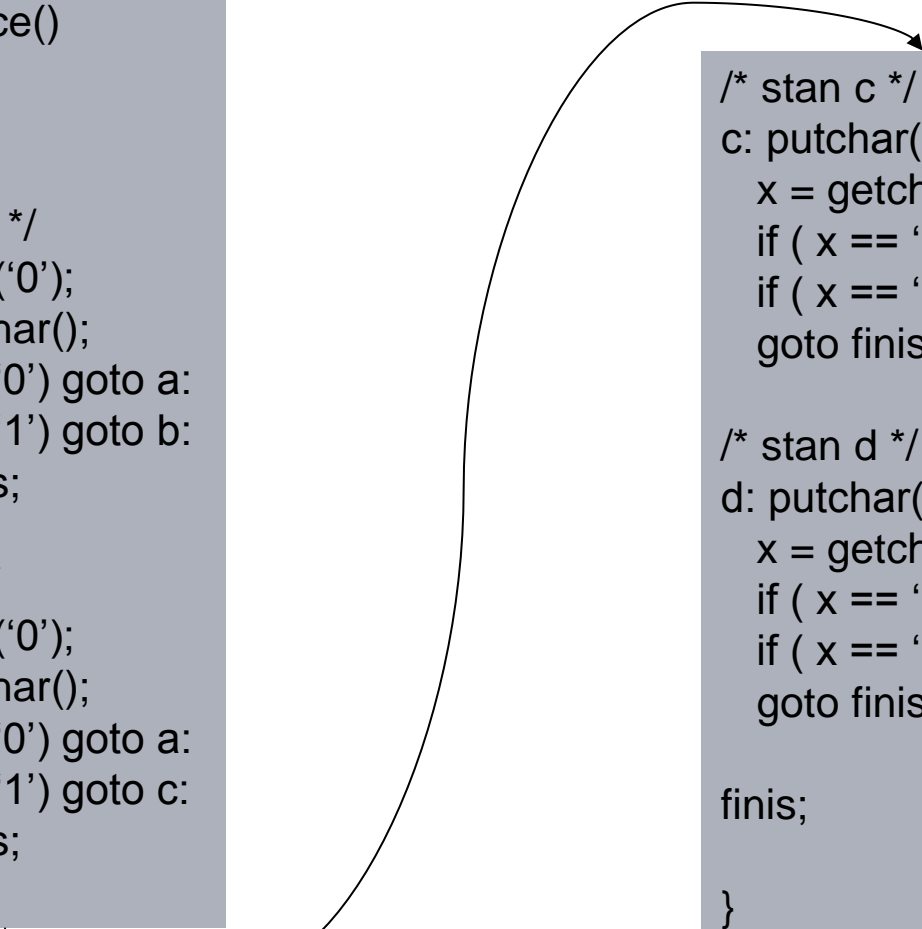
/* stan b */
b: putchar('0');
   x = getchar();
   if ( x == '0') goto a:
   if ( x == '1') goto c:
   goto finis;
```

```
/* stan c */
c: putchar('1');
   x = getchar();
   if ( x == '0') goto d:
   if ( x == '1') goto c:
   goto finis;

/* stan d */
d: putchar('1');
   x = getchar();
   if ( x == '0') goto a:
   if ( x == '1') goto c:
   goto finis;

finis;

}
```



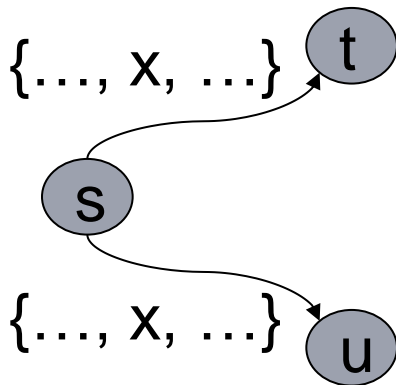
Automaty niedeterministyczne

17

- **Automaty niedeterministyczne** (ang. nondeterministic) mogą (ale nie muszą) posiadać dwa (lub więcej) przejścia z danego stanu zawierające ten sam symbol.
- Warto zauważyć, że automat deterministyczny jest równocześnie automatem niedeterministycznym, który nie posiada wielu przejść dla jednego symbolu.
- **Automaty niedeterministyczne nie mogą być bezpośrednio implementowane za pomocą programów, ale stanowią przydatne pojęcie abstrakcyjne.**

Automaty niedeterministyczne

18



W momencie podjęcia próby symulacji automatu niedeterministycznego w przypadku ciągu wejściowego składającego się ze znaków a_1, a_2, \dots, a_k może okazać się, że ten sam ciąg etykietuje wiele ścieżek. Wygodnie jest przyjąć, że automat niedeterministyczny akceptuje taki ciąg wejściowy, jeżeli co najmniej jedna z etykietowanych ścieżek prowadzi do stanu akceptującego.

niedeterminizm = „przypadkowość”

Jak zastąpić automat niedeterministyczny deterministycznym?

19

- Automat niedeterministyczny zastępujemy deterministycznym **przez skonstruowanie równoważnego** automatu deterministycznego. Technika ta nosi nazwę konstrukcji podzbiorów (ang. *subset construction*).

Jak zastąpić automat niedeterministyczny deterministycznym?

20

□ **Równoważność automatów:**

- Mówimy, że automat A jest równoważny (ang. *equivalent*) automatu B , jeżeli akceptują ten sam zbiór ciągów wejściowych.
Innymi słowy, jeżeli $a_1 a_2 \dots a_k$ jest dowolnym ciągiem symboli, to spełnione są dwa następujące warunki:
- Jeżeli istnieje ścieżka zaetykietowana jako $a_1 a_2 \dots a_k$ wiodąca od stanu początkowego automatu A do pewnego stanu akceptującego automatu A , to istnieje również ścieżka zaetykietowana $a_1 a_2 \dots a_k$ wiodąca od stanu początkowego automatu B do stanu końcowego tego automatu.
- Jeżeli istnieje ścieżka zaetykietowana jako $a_1 a_2 \dots a_k$ wiodąca od stanu początkowego automatu B do pewnego stanu akceptującego automatu B , to istnieje również ścieżka zaetykietowana $a_1 a_2 \dots a_k$ wiodąca od stanu początkowego automatu A do stanu końcowego tego automatu.

Indukcyjna konstrukcja automatu niedeterministycznego

21

□ Podstawa:

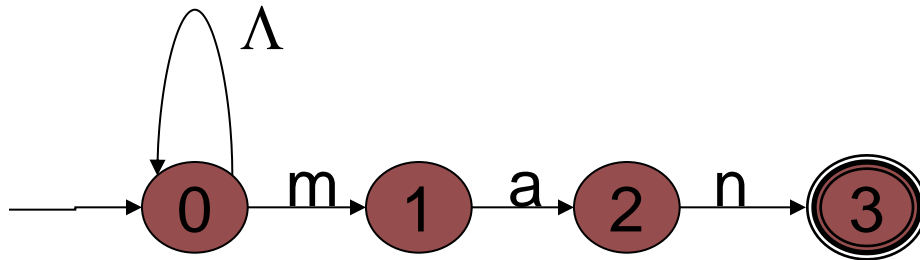
- Jeżeli stanem początkowym automatu niedeterministycznego N jest s_0 , to stanem początkowym automatu deterministycznego D jest $\{s_0\}$, czyli zbiór zawierający tylko element s_0 .

□ Indukcja:

- Załóżmy, że ustalono, iż S , zbiór stanów automatu N , jest stanem automatu D .
- Rozpatrujemy po kolei każdy możliwy znak wejściowy x . Dla danego x określamy, że T jest zbiorem stanów t automatu N , takich, że dla pewnego stanu s należącego do zbioru S istnieje przejście z s do t etykietą zawierającą znak x .
- Wówczas zbiór T jest stanem automatu D i istnieje przejście z S do T względem znaku wejściowego x .

Konstrukcja automatu deterministycznego D

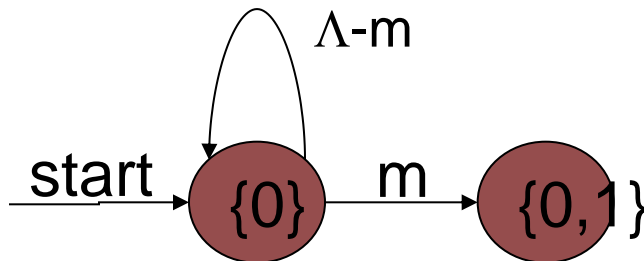
22



Niedeterministyczny automat rozpoznający ciąg znaków kończący się sekwencją "man".

Rozpoczynamy od zbioru $\{0\}$, który jest stanem początkowym automatu D.

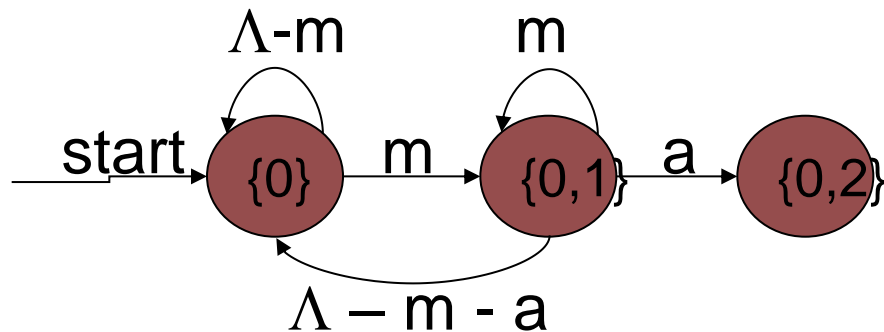
Stan $\{0\}$ i jego przejścia



Dla dowolnej litery oprócz m ze stanu 0 następuje przejście do stanu 0, w przypadku m następuje przejście do stanu 0 lub 1. Automat D potrzebuje stanu $\{0\}$, który już posiada oraz stanu $\{0,1\}$ który należy dodać.

Konstrukcja automatu deterministycznego D

23



Stan $\{0\}$ i $\{0,1\}$ oraz ich przejścia

Konstrukcja automatu deterministycznego D

24

- **Następnie, należy rozważyć przejścia ze stanu $\{0,1\}$.**
 - Dla niedeterministycznego automatu, wszystkie znaki wejściowe oprócz m i a powodują przejście ze stanu 0 tylko do stanu 0 , a ze stanu 1 nie można nigdzie przejść. Stąd istnieje przejście ze stanu $\{0,1\}$ do stanu $\{0\}$, zaetykietowane $(L - m - a)$.
 - W przypadku wejściowego znaku m , ze stanu 1 nie można przejść nigdzie, a ze stanu 0 można przejść do stanu 0 lub 1 . Dlatego istnieje przejście $\{0,1\}$ do niego samego zaetykietowane litera m .
 - W przypadku znaku wejściowego a , ze stanu 0 przechodzi się do niego samego, ze stanu 1 przechodzi się do stanu 2 . Stąd przejście zaetykietowane przez a ze stanu $\{0,1\}$ do stanu $\{0,2\}$.

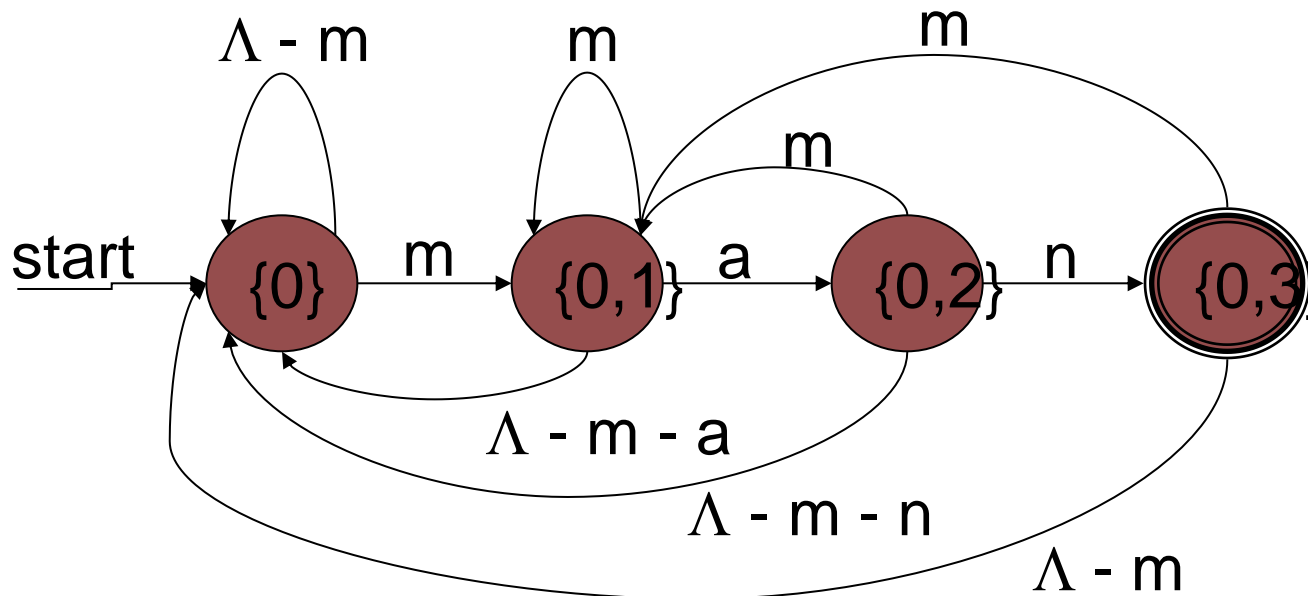
Konstrukcja automatu deterministycznego D

25

- Teraz należy skonstruować przejścia ze stanu $\{0,2\}$. W przypadku wszystkich znaków wejściowych oprócz m i n , ze stanu 0 można przejść jedynie do stanu 0, zaś ze stanu 2 nie można nigdzie przejść. Zatem istnieje przejście ze stanu $\{0,2\}$ do stanu $\{0\}$ zaetykietowane wszystkimi literami oprócz m i n .
- W przypadku znaku wejściowego m , ze stanu 2 nie można nigdzie przejść, a ze stanu 0 można przejść zarówno do stanu 0 jak i stanu 1. Zatem istnieje przejście ze stanu $\{0,2\}$ do stanu $\{0,1\}$ zaetykietowane przez m .
- W przypadku znaku wejściowego n , ze stanu 0 można przejść tylko do tego samego stanu, zaś ze stanu 2 przechodzi się do stanu 3. Zatem istnieje przejście ze stanu $\{0,2\}$ do stanu $\{0,3\}$ zaetykietowane przez n .
- Ten stan automatu D jest stanem akceptującym gdyż zawiera stan akceptujący automatu niedeterministycznego, czyli stan 3.
- W końcu należy określić przejścia ze stanu $\{0,3\}$. Z uwagi na to że ze stanu 3 nie można nigdzie przejść w przypadku dowolnego znaku wejściowego, przejścia ze stanu $\{0,3\}$ odpowiadają przejściom tylko ze stanu 0, stąd ograniczają się jedynie do przejść do stanu $\{0\}$. Ponieważ przejścia ze stanu $\{0,3\}$ nie prowadzą do żadnego stanu automatu D, którego jeszcze nie sprawdziliśmy, konstrukcja automatu D można uznać za skończoną.

Automat deterministyczny D

26

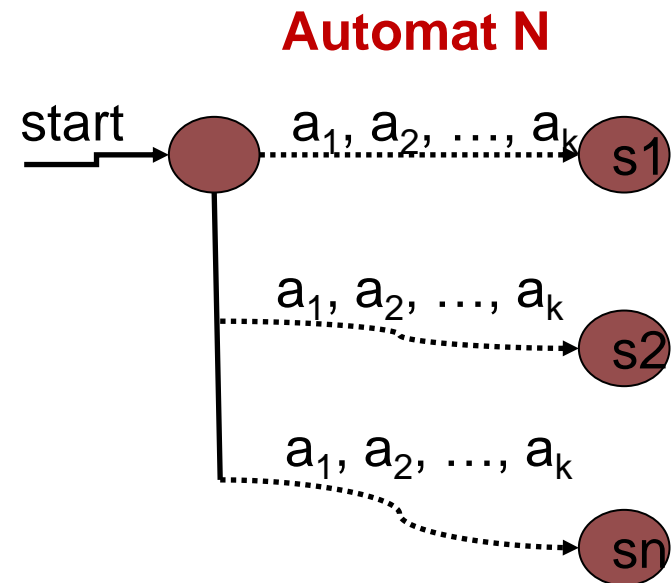
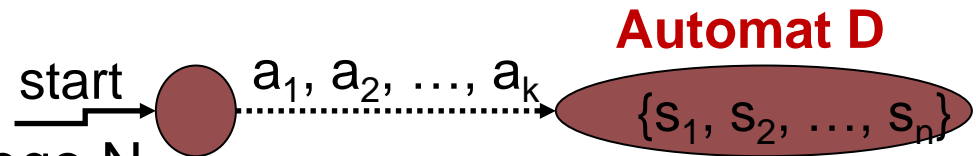


Konstrukcje automatu można uznać za skończoną. Przejścia ze stanu $\{0,3\}$ nie prowadzi do żadnego stanu automatu D którego jeszcze nie sprawdziliśmy. Stan $\{0\}$ oznacza że odczytany ciąg nie kończy się żadnym przedrostkiem wyrazu man , stan $\{0,1\}$ że kończy się sekwencją m , stan $\{0,2\}$ że kończy się sekwencją ma , stan $\{0,3\}$ że kończy się sekwencją man .

Uzasadnienie poprawności konstrukcji podzbiorów

27

- Jeżeli automat D jest konstruowany na podstawie automatu niedeterministycznego N przy użyciu konstrukcji podzbiorów, to D jest automatem deterministycznym.
- Dla każdego stanu wejściowego x oraz dla każdego stanu S automatu D definiuje się określony stan T automatu D, taki, że etykieta przejścia z S do T zawiera symbol x .
- Należy jeszcze wykazać że automaty S i T są równoważne. Przeprowadza się dowód indukcyjny.



Minimalizacja automatów

28

- Jednym z zagadnień dotyczących automatów jest kwestia określenia **minimalnej liczby stanów** wymaganych do wykonania danego zadania.
- Posiadając pewien automat możemy zadać pytanie czy istnieje równoważny automat posiadający mniejszą liczbę stanów, a jeśli tak, jaka jest najmniejsza liczba stanów dowolnego automatu równoważnego.
- **Dla automatów deterministycznych zawsze istnieje pewien unikatowy automat deterministyczny o minimalnej liczbie stanów, równoważny z danym automatem.**
- Dowodzimy przez pokazanie że nie ma stanów nierównoważnych.
- Nie istnieje podobna teoria w sytuacji automatów niedeterministycznych.
- **Nierównoważność dwóch stanów:**
 - Podstawa: Jeżeli stan s jest stanem akceptującym, a stan t nie jest stanem akceptującym (lub odwrotnie), to s i t nie są równoważne.
 - Indukcja: Jeżeli istnieje pewien symbol wejściowy x , taki, że ze stanów s i t następują przejścia względem tego symbolu do dwóch różnych stanów, o których wiadomo że nie są równoważne, to stany s i t nie są równoważne.

Podsumowanie

29

- **Automat skończony** jest to oparty na modelu grafowym sposób określania wzorców. Występują jego dwie odmiany: automat deterministyczny oraz automat niedeterministyczny.
- Istnieje możliwość **konwersji automatu deterministycznego** na program rozpoznający wzorce.
- Istnieje możliwość **konwersji automatu niedeterministycznego** na automat deterministyczny rozpoznający te same wzorce dzięki konstrukcji podzbiorów.
- Istnieje bliski związek między automatami deterministycznymi a programami, które wykorzystują pojęcie stanu w celu odróżnienia ról, jakie odgrywają różne części programu. Zaprojektowanie automatu deterministycznego stanowi często dobry sposób opracowania takiego programu. Może to być trudne zadanie, często łatwiej zaprojektować automat niedeterministyczny, a następnie za pomocą konstrukcji podzbiorów zamienić go na jego odpowiednik deterministyczny.

Wykład 10, part II

30

Wyrażenia regularne

- Definicja
- Operatory
- Prawa algebraiczne
- Od wyrażen do automatów z ε -przejściami
 - ▣ Eliminacja ε -przejsć
- Od automatów do wyrażen
 - ▣ Eliminacja stanów
- Redukcja zupełna automatów

Wyrażenia regularne

31

- **Wyrażenia regularne** (ang. regular expressions) stanowią algebraiczny sposób definiowania wzorców.
- Wyrażenia regularne stanowią analogię do algebry wyrażeń arytmetycznych oraz do algebry relacyjnej.
- Zbiór wzorców które można wyrazić w ramach algebry wyrażeń regularnych odpowiada dokładnie zbiorowi wzorców, które można opisać za pomocą automatów.

Operandy wyrażeń regularnych

32

- Wyrażenia regularne posiadają pewne rodzaje operandów niepodzielnych (ang. *atomic operands*). Poniżej lista:
 - Znak
 - Symbol ε
 - Symbol \emptyset
 - Zmienna która może być dowolnym wzorcem zdefiniowanym za pomocą wyrażenia regularnego.
- **Wartość wyrażenia regularnego jest wzorcem** składającym się ze zbioru ciągów znaków, który często **określa się mianem języka** (ang. *language*).
- Język określony przez wyrażenia regularne **E** oznaczony będzie jako **L(E)** lub określany jako **język wyrażenia E**.

Języki operandów niepodzielnych

33

- Języki operandów niepodzielnych definiuje się w następujący sposób.
 - Jeżeli x jest dowolnym znakiem, to wyrażenie regularne x oznacza język $\{x\}$, to znaczy $L(x) = \{x\}$.
Należy zauważyć, że taki język jest zbiorem zawierającym jeden ciąg znakowy.
Ciąg ten ma długość 1 i jedyna pozycja tego ciągu określa znak x .
 - $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$. Specjalny symbol ε jako wyrażenie regularne oznacza zbiór, którego jedynym ciągiem znakowym jest ciąg pusty, czyli ciąg o długości 0.
 - $L(\emptyset) = \emptyset$. Specjalny symbol \emptyset jako wyrażenie regularne oznacza zbiór pustych ciągów znakowych.
- Istnieją trzy operatory w odniesieniu do wyrażeń regularnych.
- Można je grupować przy użyciu nawiasów, podobnie jak ma to miejsce w przypadku innych znanych algebr.
- Definiuje się prawa kolejności działań oraz prawa łączności, które pozwalają na pomijanie niektórych par nawiasów – tak jak w przypadku wyrażeń arytmetycznych.

Operatory wyrażeń regularnych

34

□ Suma:

- Symbol sumy (ang. union) oznacza się za pomocą symbolu $|$. Jeżeli R i S są dwoma wyrażeniami regularnymi, to $R | S$ oznacza sumę języków określanych przez R i S . To znaczy $L(R|S) = L(R) \cup L(S)$.
- **$L(R)$ i $L(S)$ są zbiorami ciągów znakowych, notacja sumowania jest uzasadniona.**

□ Złożenie:

- Operator złożenia (ang. concatenation) nie jest reprezentowany przez żaden odrębny symbol.
- Jeżeli R i S są wyrażeniami regularnymi to RS oznacza ich złożenie. $L(RS)$, czyli język określony przez RS , jest tworzony z języków $L(R)$ i $L(S)$ w sposób następujący:
 - Dla każdego ciągu znakowego r należącego do $L(R)$ oraz każdego ciągu znakowego s należącego do $L(S)$, ciąg rs , czyli złożenie ciągów r i s , należy do $L(RS)$.
- **Złożenie dwóch list takich jak ciągi znaków, jest wykonywane przez pobranie po kolei elementów pierwszej z nich i uzupełnienie ich po kolei elementami drugiej listy.**

Operatory wyrażeń regularnych

35

□ Domknięcie:

- Operator domknięcia (ang. *closure*), jest to operator jednoargumentowy przyrostkowy. Domknięcie oznacza się za pomocą symbolu $*$, tzn. R^* oznacza domknięcie wyrażenia regularnego R . Operator domknięcia ma najwyższy priorytet.
- Efekt działania operatora domknięcia można zdefiniować jako „określenie występowania zera lub większej liczby wystąpień ciągów znaków w R ”.

Operatory wyrażeń regularnych

36

□ Domknięcie:

□ Oznacza to że $L(R^*)$ składa się z:

- Ciągu pustego ε , który można interpretować jako brak wystąpień ciągów znaków w $L(R)$.
- Wszystkich ciągów znaków języka $L(R)$. Reprezentują one jedno wystąpienie ciągów znaków w $L(R)$.
- Wszystkich ciągów znaków języka $L(RR)$, czyli złożenia języka $L(R)$ z samym sobą. Reprezentują one dwa wystąpienia ciągów znaków z $L(R)$.
- Wszystkich ciągów znaków języka $L(RRR)$, $L(RRRR)$ i tak dalej, które reprezentują trzy, cztery i więcej wystąpień ciągów znaków z $L(R)$.

□ Nieformalnie można napisać:

$$R^* = \varepsilon \mid R \mid RR \mid RRR \mid \dots$$

□ Wyrażenie po prawej stronie to nie jest wyrażeniem regularnym ponieważ zawiera nieskończoną liczbę wystąpień operatora sumy. Wszystkie wyrażenia regularne są tworzone ze skończonej liczby wystąpień operatorów.

Kolejność operatorów wyrażeń regularnych

37

- Istnieje określona kolejność wykonywania **trzech działań wyrażeń regularnych**: sumy, złożenia oraz domknięcia. Kolejność ta jest następująca:
 1. Domknięcie (najwyższy priorytet)
 2. Złożenie
 3. Suma (najniższy priorytet)
- **Przykład:**
$$a | bc^*d = (a | (b (c^*)) d)$$

Prawa algebraiczne wyrażeń regularnych

38

- Możliwe jest aby dwa wyrażenia regularne określały ten sam język.
- Dwa wyrażenia regularne **R | S** oraz **S | R** określają ten sam język bez względu na postać wyrażeń regularnych jakie się podstawia za **R** i **S**. Wynika to z faktu że sumowanie jest przemienne.
- Dwa wyrażenia regularne są **równoważne** (ang. *equivalent*) jeżeli $L(R) = L(S)$.

Prawa algebraiczne wyrażeń regularnych

39

- Tożsamość sumowania:

$$(\emptyset | R) \equiv (R | \emptyset) \equiv R$$

- Tożsamość złożenia:

$$\varepsilon R \equiv R \varepsilon \equiv R$$

- Anihilator złożenia:

$$\emptyset R \equiv R \emptyset \equiv \emptyset$$

- Przemienność sumowania: $(R | S) \equiv (S | R)$

- Łączność sumowania:

$$((R | S) | T) \equiv (R | (S | T))$$

- Łączność złożenia:

$$((R S) T) \equiv (R (S T))$$

Prawa algebraiczne wyrażeń regularnych

40

- Lewostronna rozdzielność złożenia względem sumowania:
$$(R (S \mid T)) \equiv (RS \mid RT)$$
- Prawostronna rozdzielność złożenia względem sumowania:
$$((S \mid T) R) \equiv (SR \mid TR)$$
- Idempotencja sumowania:
$$(R \mid R) \equiv R$$
- Równoważności operatora domknięcia:
$$\emptyset^* \equiv \varepsilon$$
$$RR^* \equiv R^*R$$
$$(RR^* \mid \varepsilon) \equiv R^*$$

Od wyrażeń regularnych do automatów

41

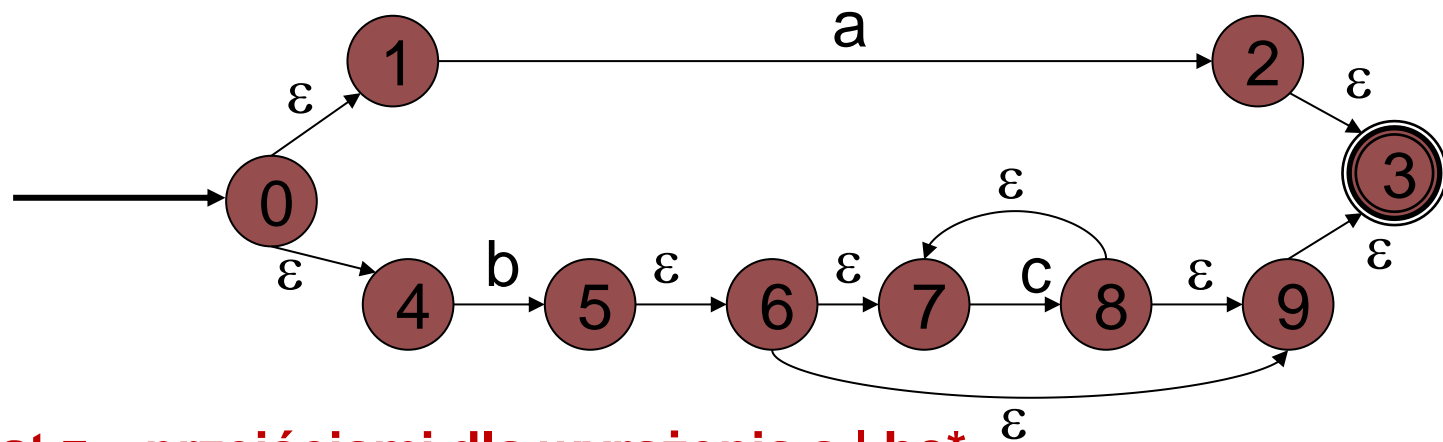
- Istnieje sposób na **zamianę dowolnego wyrażenia regularnego na automat niedeterministyczny**, a następnie przez użycie konstrukcji podzbiorów – zamiany takiego automatu na automat deterministyczny.
- Istnieje także możliwość **zamiany dowolnego automatu na wyrażenie regularne**, którego język dokładnie odpowiada zbiorowi ciągów znaków akceptowanych przez automat.

Stąd automaty i wyrażenia regularne dają te same możliwości opisywania języków.

Automaty z epsilon przejściami

42

- Należy rozszerzyć notację używaną w przypadku automatów w celu umożliwienia opisu krawędzi posiadających etykietę ε . Takie automaty wciąż akceptują ciąg znaków s wtedy i tylko wtedy, gdy ścieżka zaetykietowana ciągiem s wiedzie od stanu początkowego do stanu akceptującego. Symbol ε , ciąg pusty, jest „niewidoczny” w ciągach znaków, stąd w czasie konstruowania etykiety danej ścieżki w efekcie usuwa się wszystkie symbole ε i używa tylko rzeczywistych znaków.



Automat z ε -przejściami dla wyrażenia $a \mid bc^*$

Od wyrażeń regularnych do automatów z epsilon przejściami

43

- Wyrażenie regularne zamienia się na automat przy użyciu algorytmu opracowanego na podstawie indukcji zupełnej względem liczby wystąpień operatorów w wyrażeniu regularnym.

Od wyrażeń regularnych do automatów z epsilon przejściami

44

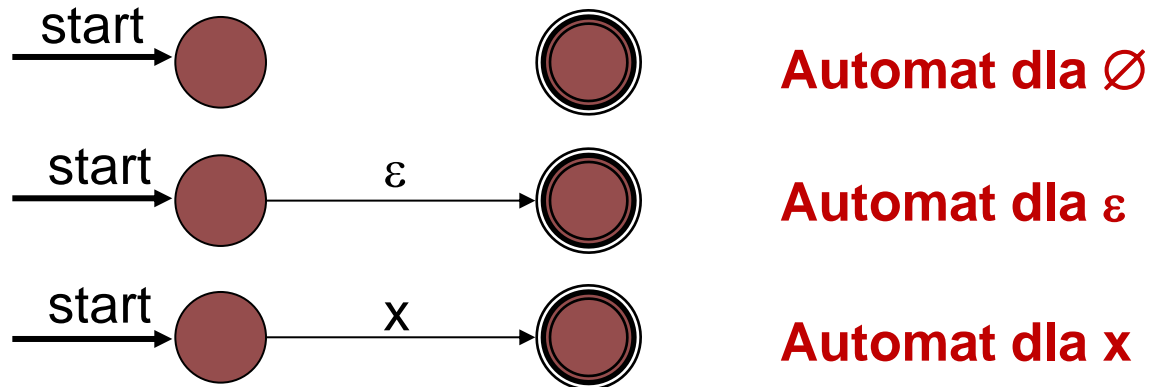
□ **Twierdzenie S(n):**

- Jeżeli R jest wyrażeniem regularnym o n wystąpieniach operatorów i braku zmiennych jako operatorów niepodzielnych, to istnieje automat A z ε -przejściami, który akceptuje ciągi znaków należące do języka $L(R)$ i żadne inne.
- Ponadto automat A :
 - posiada tylko jeden stan akceptujący,
 - nie posiada krawędzi wiodących do jego stanu początkowego,
 - nie posiada krawędzi wychodzących z jego stanu akceptującego.

Podstawa

45

- Jeżeli $n=0$, to R musi być operandem niepodzielnym, którym jest \emptyset , ε lub x dla pewnego symbolu x .
- Dla owych trzech przypadków można zaprojektować 2-stanowy automat, spełniający wymagania twierdzenia $S(0)$.



- Automaty dla przypadków bazowych.
- Każdy spełnia warunki 1, 2, 3 (patrz poprzednia strona).

Indukcja

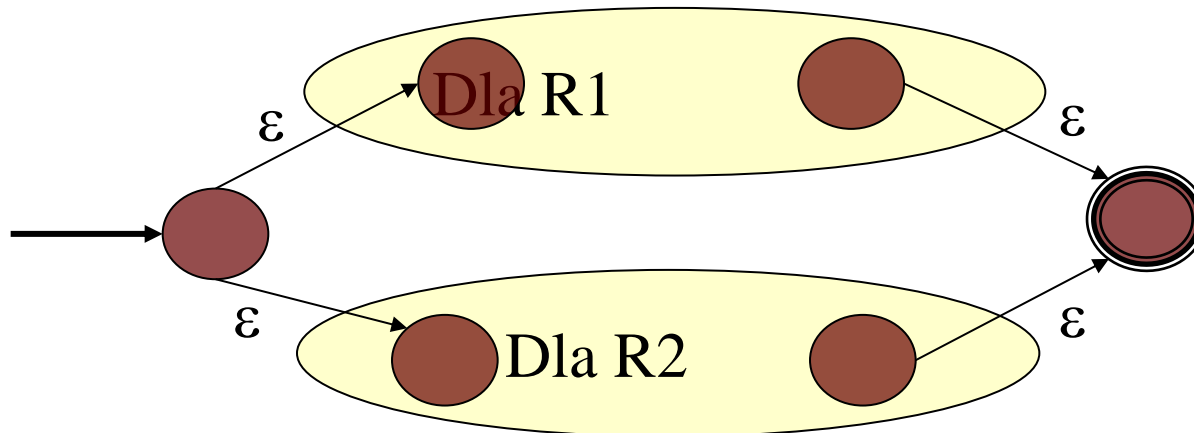
46

- Zakładamy teraz, że $S(i)$ jest prawdziwe dla wszystkich $i \leq n$.
- To znaczy, że dla każdego wyrażenia regularnego R o maksymalnie n wystąpieniach istnieje automat spełniający warunek hipotezy indukcyjnej i akceptujący wszystkie ciągi znaków języka $L(R)$ i żadnych innych.
- Zajmiemy się tylko najbardziej zewnętrznym operatorem w R , co oznacza, że wyrażenie R może mieć tylko formę
 $R1 \mid R2, \quad R1 R2, \quad R1^*$
w zależności od tego czy ostatni użyty operator był operatorem sumy, złożenia lub domknięcia.
- Wyrażenie $R1, R2$ nie mogą posiadać więcej niż n operatorów.

Przypadek 1: $R = R1 \mid R2$

47

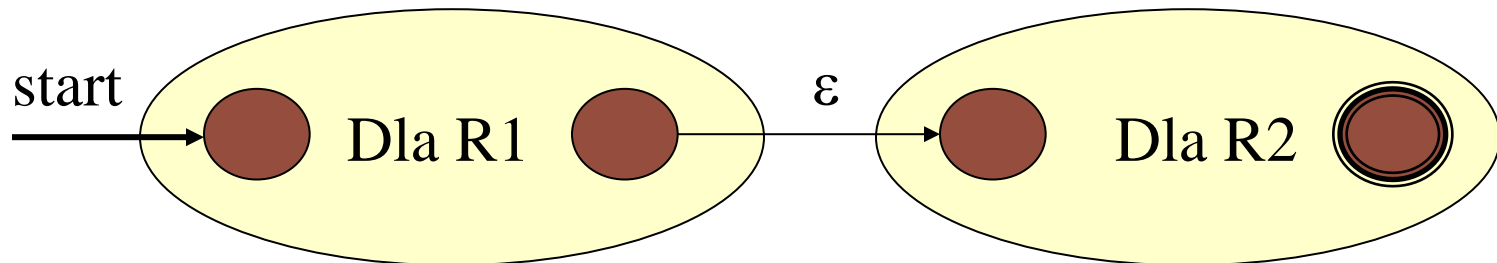
- Przechodzimy krawędzią zaetykietowaną symbolem ε do stanu początkowego automatu dla R1 lub automatu dla R2.
- Następnie przechodzimy do stanu akceptującego tego automatu, a później przejściem ε do stanu akceptującego automatu R.



Przypadek 2: $R = R1 R2$

48

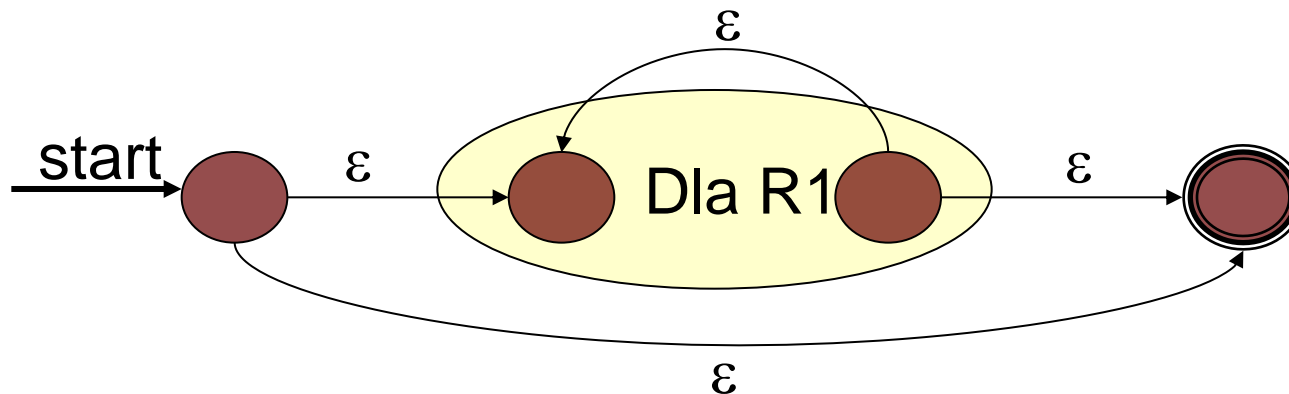
- Automat posiada jako swój stan początkowy stan początkowy automatu dla wyrażenia $R1$, a jako swój stan akceptujący – stan akceptujący dla wyrażenia $R2$.
- Dodajemy także ε - przejście ze stanu akceptującego automatu dla wyrażenia $R1$ do stanu początkowego automatu dla wyrażenia $R2$.
- Stan akceptujący pierwszego automatu przestaje być stanem akceptującym, a stan początkowy drugiego automatu przestaje być stanem początkowym w skonstruowanym automacie.



Przypadek 3: $R = R1^*$

49

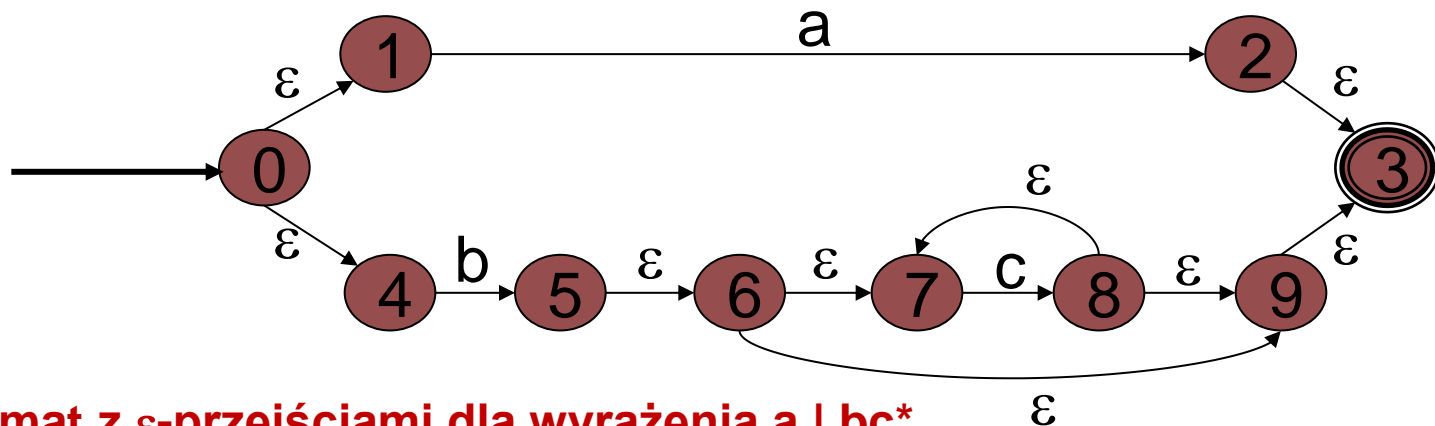
- Do automatu dla wyrażenia $R1$ dodajemy nowy stan początkowy i akceptujący.
- Stan początkowy posiada ε przejście do stanu akceptującego (a więc akceptowany jest ciąg ε) oraz do stanu początkowego automatu dla wyrażenia $R1$.
- Stan akceptujący automatu dla wyrażenia $R1$ otrzymuje ε -przejście z powrotem do swojego stanu początkowego oraz do stanu akceptującego automatu dla wyrażenia R .
- Stan początkowy i akceptujący automatu dla wyrażenia $R1$ nie są stanami początkowym i akceptującym konstruowanego automatu. Etykiety ścieżek odpowiadają ciągom należącym do języka $L(R1^*)$ czyli $L(R)$.



Eliminacja epsilon-przejęć

50

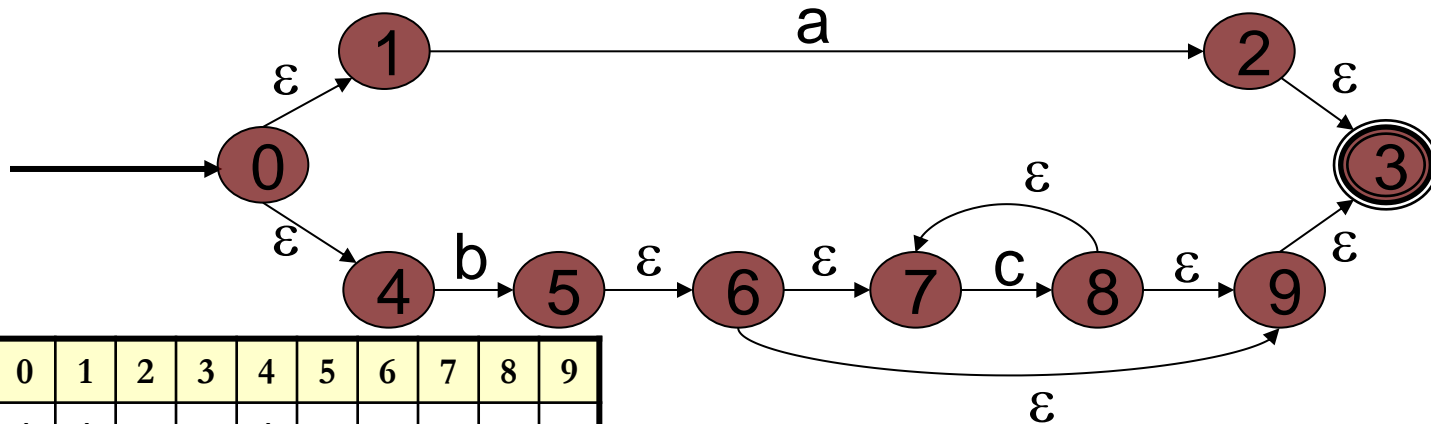
- Jeżeli stanem bieżącym jest dowolny stan s automatu z ε -przejęciami, oznacza to że jednocześnie stanem bieżącym jest dowolny stan, do którego można się dostać z s w wyniku przejścia ścieżki zawierającej krawędzie zaetykietowane symbolem ε .
- Wynika to z faktu, że bez względu na to, jaki ciąg etykietuje wybraną ścieżkę prowadzącą do s , ten sam ciąg będzie także stanowił etykietę ścieżki rozszerzonej o ε -przejścia.



Automat z ε -przejęciami dla wyrażenia $a \mid bc^*$

Eliminacja ϵ przejść

51



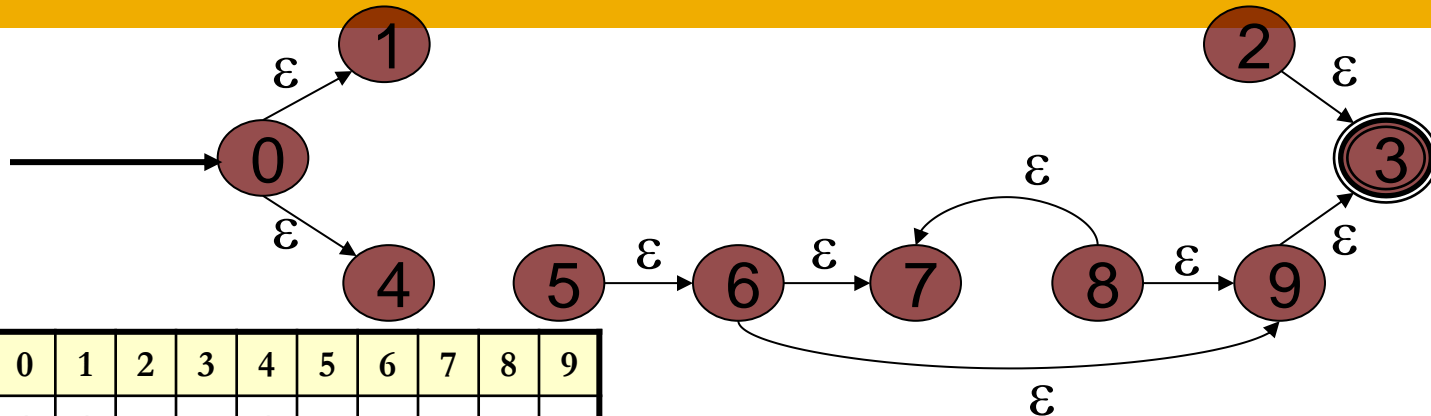
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | | | 1 | | | | | |
| 1 | | 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | 1 | 1 | | | | | | |
| 3 | | | | 1 | | | | | | |
| 4 | | | | | 1 | | | | | |
| 5 | | | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| 6 | | | | 1 | | | 1 | 1 | | 1 |
| 7 | | | | 1 | | | | 1 | | |
| 8 | | | | 1 | | | | 1 | 1 | 1 |
| 9 | | | | 1 | | | | | | 1 |

Automat z ϵ -przejściami dla wyrażenia $a \mid bc^*$

- Dla grafu automatu usuwamy wszystkie ścieżki oznaczone rzeczywistymi etykietami. Przeprowadzamy przeszukiwanie w głąb pozostałego grafu.

Tabela osiągalności

52



| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | | | 1 | | | | | |
| 1 | | 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | 1 | 1 | | | | | | |
| 3 | | | | 1 | | | | | | |
| 4 | | | | | 1 | | | | | |
| 5 | | | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| 6 | | | | 1 | | | 1 | 1 | | 1 |
| 7 | | | | 1 | | | | 1 | | |
| 8 | | | | 1 | | | | 1 | 1 | 1 |
| 9 | | | | 1 | | | | | | 1 |

Automat z ϵ -przejściami dla wyrażenia $a | bc^*$

- Dla grafu automatu usuwamy wszystkie ścieżki oznaczone rzeczywistymi etykietami. Przeprowadzamy przeszukiwanie w głąb pozostałego grafu.

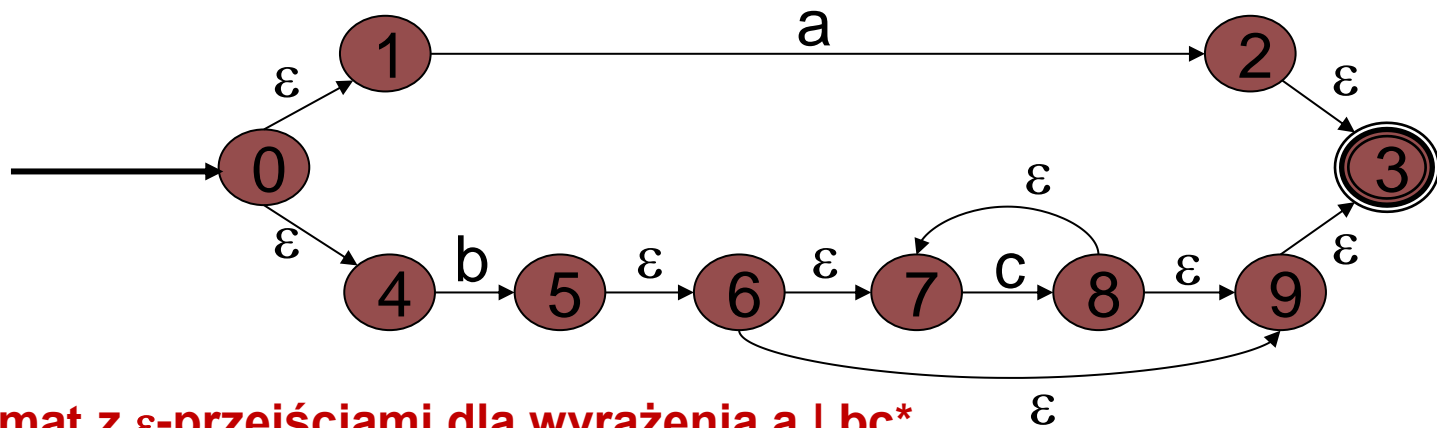
Tabela osiągalności

53

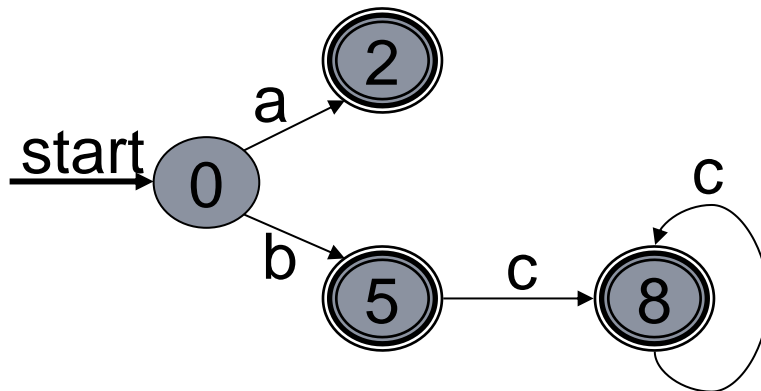
- Posiadając informacje o osiągalności, możemy skonstruować równoważny automat nie posiadający ε -przejęć. Stany do których przechodzi się krawędziami zaetykietowanymi symbolami rzeczywistymi nazywamy **stanami istotnymi**.
- W nowym automacie chcemy zawrzeć tylko te stany oraz stany początkowe dla zbioru jego własnego zbioru stanów. Należy też zdecydować które stany będą stanami akceptującymi.

Eliminacja epsilon-przejęć

54



Automat z ϵ -przejęciami dla wyrażenia $a \mid bc^*$

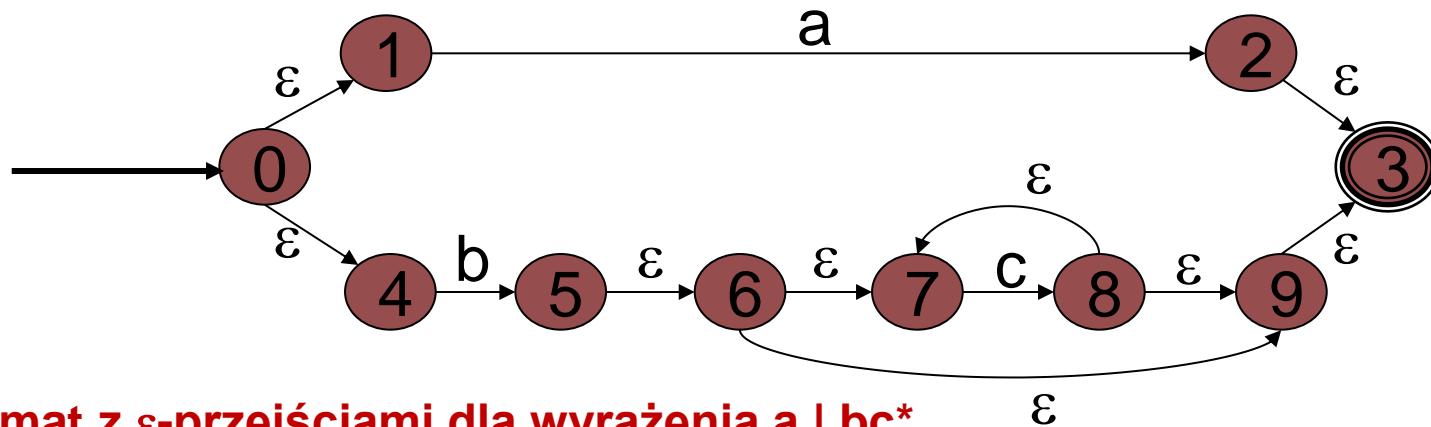


Automat skonstruowany na podstawie eliminacji ϵ -przejęć.

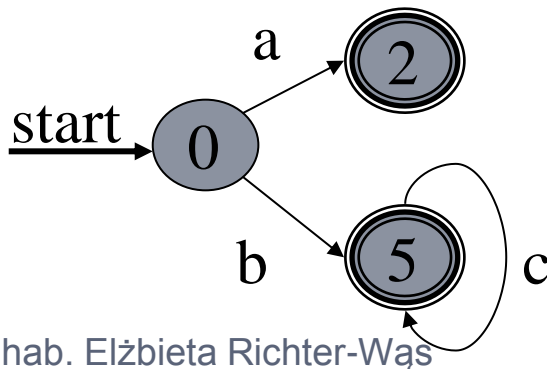
Automat akceptuje wszystkie ciągi języka $L(a \mid bc^*)$.

Eliminacja epsilon-przejęć

55



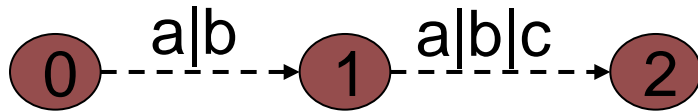
Automat z ϵ -przejściami dla wyrażenia $a \mid bc^*$



- Prostsza wersja automatu dla języka $L(a \mid bc^*)$.
- Wykorzystano obserwację że stany (5) i (8) są równoważne i mogą zostać połączone.

Od automatów do wyrażeń regularnych

56



Ścieżka z wyrażeniami regularnymi jako etykietami. Etykieta ścieżki należy do wyrażeń regularnych utworzonych w wyniku złożenia.

Od automatów do wyrażeń regularnych

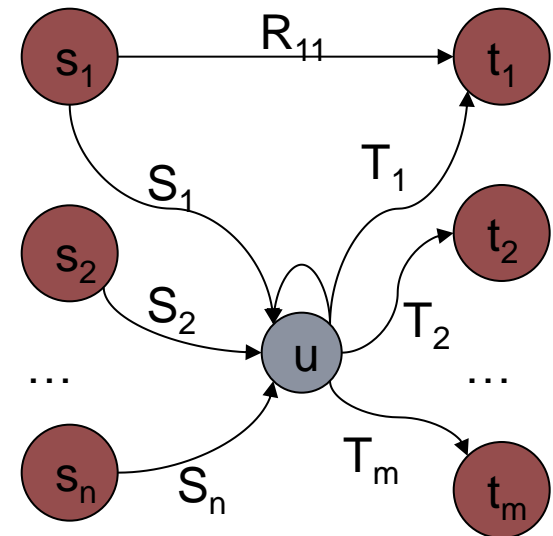
57

- Dla każdego automatu istnieje wyrażenie regularne, którego język dokładnie odpowiada zbiorowi ciągu znaków akceptowanych przez automat A.
- Konstrukcja polega na eliminacji stanów automatów. Etykiety krawędzi, które są zbiorami znaków, zastępuje się bardziej skomplikowanymi wyrażeniami regularnymi.
- Jeżeli dla pewnej krawędzi istnieje etykieta $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, zastępuje się ją wyrażeniem regularnym $x_1 | x_2 | \dots | x_n$, które reprezentuje ten sam zbiór symboli.
- Etykietę ścieżki można postrzegać jako złożenie wyrażeń regularnych opisujących krawędzie tej ścieżki, lub jako język zdefiniowany przez złożenie tych wyrażeń.
- **Przykład:**
 - Wyrażenia regularne etykietujące krawędzie to $a | b$ i $a | b | c$. Zbiór znaków etykietujących tę ścieżkę składa się z tych, które występują w języku zdefiniowanym przez wyrażenia regularne: $(a | b)(a | b | c)$ czyli $\{aa, ab, ac, ba, bb, bc\}$.

Konstrukcja eliminacji stanów

58

- Zbiór ciągów znaków etykietujących ścieżki wiodące **z wierzchołków s_i do wierzchołka u** , włącznie z ścieżkami biegnącymi kilkakrotnie wokół pętli $u \rightarrow u$, oraz **z wierzchołka u do wierzchołka t_j** , jest opisany za pomocą wyrażenia regularnego **$S_i U^* T_j$** .
- Po eliminacji wierzchołka u należy **zastąpić etykietę R_{ij}** , czyli etykietę krawędzi $s_i \rightarrow t_j$ **przez etykietę $R_{ij} \mid S_i U^* T_j$** .



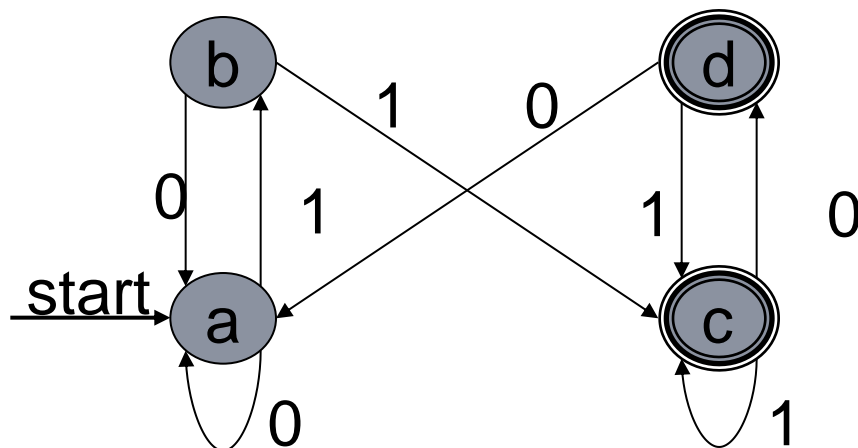
Konstrukcja eliminacji stanów

59

- Kluczowym etapem konwersji z postaci automatu na wyrażenie regularne jest **eliminacja stanów**. Chcemy **wyeliminować stan u** , ale chcemy zachować etykiety krawędzi występujące w postaci wyrażień regularnych, tak aby zbiór etykiet ścieżek między dowolnymi pozostałymi stanami nie uległ zmianie.
- **Poprzedniki stanu u** to s_1, s_2, \dots, s_n zaś **następniki stanu u** to t_1, t_2, \dots, t_m (mogą też istnieć stany wspólne).

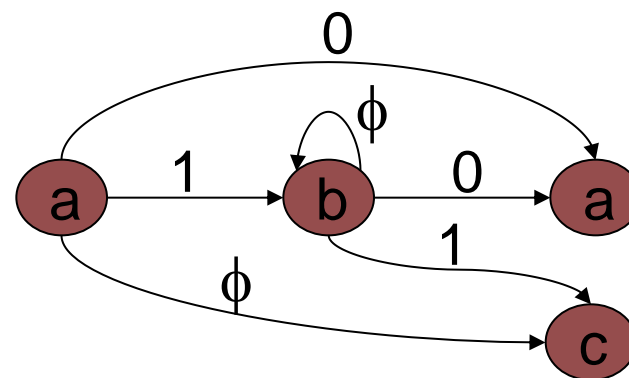
Konstrukcja eliminacji stanów

60



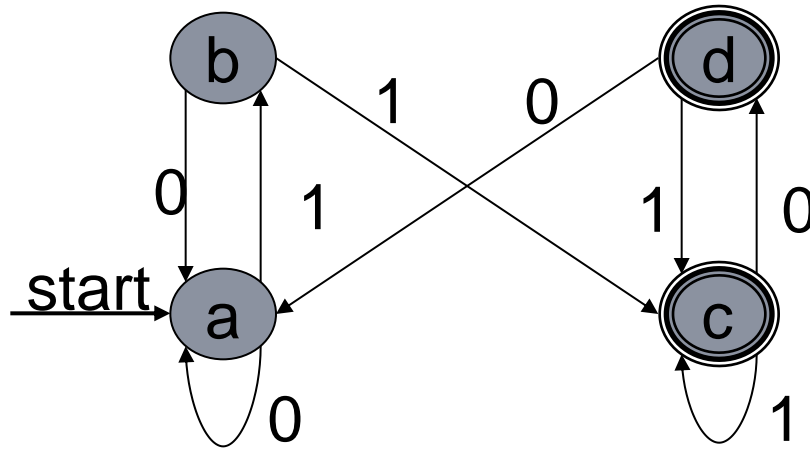
Automat skończony
filtra odbijającego.

Stan b, jego poprzedniki oraz
następniki.

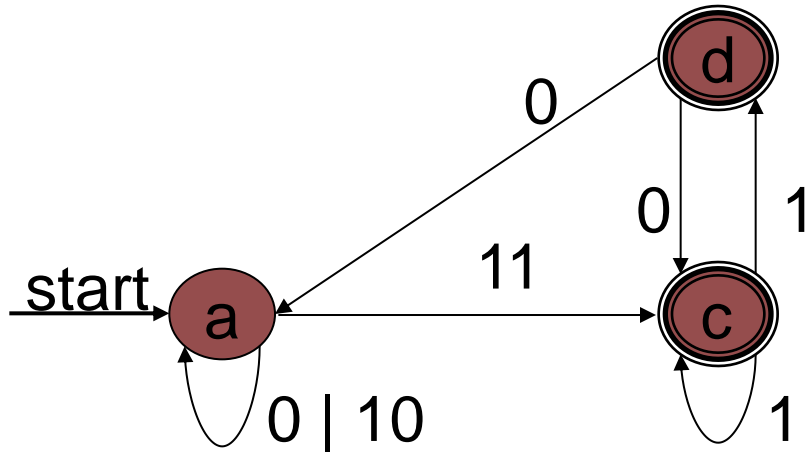


Konstrukcja eliminacji stanów

61



Automat skończony
filtra odbijającego.



Automat skończony
filtra odbijającego
po wyeliminowaniu
stanu b.

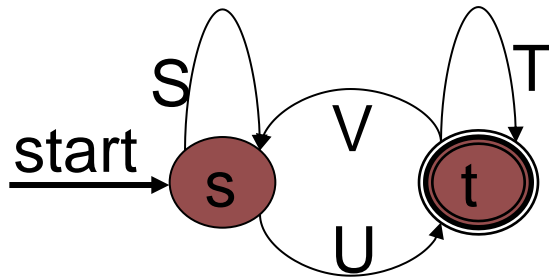
Redukcja zupełna automatu

62

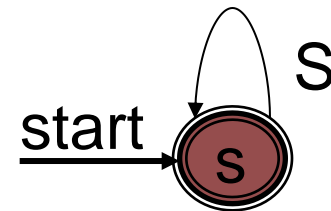
- W celu otrzymania wyrażenia regularnego określającego wszystkie ciągi znaków akceptowane przez automat A i żadne inne, należy rozpatrzyć po kolei **każdy stan akceptujący t** automatu A .
- Każdy ciąg znaków akceptowany przez automat A jest akceptowany dlatego, że etykietuje on **ścieżkę wiodącą** ze stanu początkowego s do pewnego stanu akceptującego t .

Redukcja zupełna automatu

63



Automat zredukowany do dwóch stanów.
Wyrażenie regularne: $S^*U(T | VS^*U)^*$



Automat posiadający jedynie
stan początkowy.
Wyrażenie regularne: S^*

Posumowanie

64

- **Trzy sposoby określania języków** dają te same możliwości wyrażania:
 - 1) Istnieje pewien automat deterministyczny, akceptujący wszystkie ciągi znaków języka L i żadne inne.
 - 2) Istnieje pewien, być może niedeterministyczny automat, akceptujący wszystkie ciągi znaków języka L i żadne inne.
 - 3) Język L jest językiem $L(R)$ pewnego wyrażenia regularnego.
- Konstrukcja podzbiorów pokazuje, że 2 implikuje 1.
- Stwierdzenie 1 implikuje 2 gdyż automat deterministyczny jest szczególnym rodzajem automatu niedeterministycznego.
- Przechodzenie od wyrażeń regularnych do automatów oznacza że 3 implikuje 2.
- Przechodzenie od automatów do wyrażeń regularnych oznacza że 2 implikuje 3.

Posumowanie

65

- Automaty deterministyczne mogą być używane jako podstawa programów, które rozpoznają wiele różnych rodzajów wzorców w ciągach znaków.
- Wyrażenia regularne są często przydatną konwencją tonacyjną opisywania wzorców. Istnieje formalizm praw algebraicznych dla wyrażeń regularnych.

Pytania do egzaminu

66

- 1) Co to jest wzorzec?
- 2) Na czym polega opis wzorca przy pomocy automatu?
- 3) Czym się różni automat deterministyczny od automatu niedeterministycznego?
- 4) Na czym polega technika konstrukcji podzbiorów?
- 5) Na czym polega opis wzorca przy pomocy wyrażenia regularnego?
- 6) W jaki sposób przechodzimy od automatu do wyrażenia regularnego?
- 7) Narysuj automaty dla przypadków bazowych wyrażenia regularnego.