Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka - Zestaw 7
Informatyka stosowana, wszystkie grupy

1. (komputerowe) Niech niezależne zmienne $X_1 \dots X_n$ mają rozkłady normalne N(0,1). Wtedy $Y = \sum_{i=0}^{i=n} x_i^2$ ma rozkład chi-kwadrat o n stopniach swobody. Napisać bazujący na tym generator liczb losowych Y (np. dla n=3). Otrzymany wynik porównać na wykresie z analityczną postacią rozkładu $\chi^2_{n=3}$. Zmienne o rozkładzie normalnym proszę otrzymać korzystając z generatora o rozkładzie jednorodnym i transformacji Box-Mullera.

2. Niezależne wielkości X_i, $i = 1, 2, \dots, N$, pochodzą z rozkładu o nieznanych parametrach $E(X)$ i $\sigma(X) < \infty$. Wykazać, że

$$T_n\left(\sigma^2(X)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2.$$

jest obciążonym estymatorem $\sigma^2(X)$ i asymptotycznie nieobciążonym estymatorem $\sigma^2(X)$, zaś

$$T_n\left(\sigma^2(X)\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2.$$

jest nieobciążonym estymatorem $\sigma^2(X)$.

3. Wiedząc że zmienna losowa X ma rozkład normalny i wartość oczekiwaną E(X)=0, znajdź odchylenie standardowe w następujących przypadkach, gdy wiadomo że:

   (a) Prawdopodobieństwo $\mathrm{P}(-4 < X < 4) = 0.954$
   (b) Prawdopodobieństwo $\mathrm{P}(X < -15) = 0.0015$
   (c) Prawdopodobieństwo $\mathrm{P}(-1.348 < X < 1.348) = 0.5$

4. Zmienna losowa Y ma rozkad chi-kwadrat o 13 stopniach swobody. Znajdź prawdopodobieństwo:

   (a) $\mathrm{P}(Y < 5)$
   (b) $\mathrm{P}(Y > 9.3)$
   (c) $\mathrm{P}(7.04 < Y < 8.63)$

5. Wykonano 6 równoczesnych pomiarów wielkości X i Y:
   X = 1.7, 1.2, 0.6, 1.4, 1.3, 1.0
   Y = 1.4, 1.0, 0.5, 1.4, 2.1, 1.3

   (a) Oszacuj punktowo wartość oczekiwaną E(X) i E(Y)

(b) Oszacuj punktowo odchylenia standardowe $\sigma(X)$ i $\sigma(Y)$.

(c) Oszacuj kowariancję cov(X,Y) i współczynnik korelacji $\rho(X,Y)$ dla wielkości X i Y.

(d) Obliczając kolejne pary dla zmiennych $A = X - 2Y$ i $B = X^2 + Y^2$ oszacować punktowo wartości oczekiwane, odchylenia standardowe i kowariancję zmiennych A i B.

(e) Stosując wzory na przenoszenie błędów oszacuj wartości oczekiwane, odchylenia standardowe i kowariancję zmiennych $A = X - 2Y$ i $B = X^2 + Y^2$.

6. W n=8 niezależnych pomiarach pewnej wielkości X (o nieznanych parametrach rozkładu) otrzymano następujące wyniki estymatorów wartości oczekiwanej i wariancji:

$$T(E(X)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 2.0$$

oraz

$$T(\sigma^2(X)) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = 5.05$$

a) Podaj przedział ufności dla E(X) przy poziomie ufności 0.95
b) Podaj przedział ufności dla wariancji $\sigma^2(X)$ i odchylenia standardowego $\sigma(X)$ przy poziomie ufności 0.95.
c) Podaj przedział ufności dla E(X) przy poziomie ufności 0.95, gdyby znana była informacja, że $\sigma^2(X)$=4.8.

7. Zauważono, że w próbie 15 pacjentów pewna choroba zakaźna powoduje wystąpienie objawów średnio po 10.37 dniach (z estymatorem wariancji $S^2(X) = 3.5$) od momentu zakażenia. Zakładając normalny rozkład pojawiania się objawów, proszę znaleźć ile dni powinna wynosić kwarantanna, po której z ufnością 0.95 możemy stwierdzić czy pacjent uległ zakażeniu? O ile dni wydłuży się kwarantanna, gdy poziom ufności zwiększymy do 0.9999?