RÓWNANIA REKURENCYJNE

Zadanie 1. Rozwiąż z dokładności do Θ równanie

$$T(n) = T(\lceil n/5 \rceil) + T(\lceil 7n/10 \rceil) + \Theta(n).$$

Zadanie 2. Talia składa się z 2^n kart. Sortujemy te karty poprzez rekurencyjne rozkładanie ich na dwie równe kupki w następujący sposób:

- Jeśli kupka składa się z jednej karty, to kupka ta jest posortowana.
- Kupkę zawierającą 2^k kart, gdzie $k > 0$, dzielimy na dwie kupki zawierające po 2^{k-1} kart. Każdą z tych mniejszych kupek sortujemy oddzielnie (powtarzając rekurencyjnie całą procedurę sortowania). Następnie kolejno zbieramy karty ze szczytów obu kupek, zawsze zabierając większą z dwu szczytowych kart.

Oblicz ile ruchów potrzebnych było do posortowania wszystkich 2^n kart, jeżeli rozdzielenie 2^k kart na dwie kupki wymaga 2^{k-1} ruchów, a złożenie dwu posortowanych kupek, o 2^{k-1} kartach, w jedną całość wymaga 2^k ruchów.

Zadanie 3. [CLRS04, Zadanie 4.2-4.] Rozwiąż z dokładności do Θ równanie

$$T(n) = T(n-a) + T(a) + cn,$$

gdzie $a \geqslant 1$ i $c > 0$ są stałymi.

Zadanie 4. [CLRS04, Zadanie 4.2-5.] Rozwiąż z dokładności do Θ równanie

$$T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)\, n) + cn,$$

gdzie $\alpha \in (0,1)$ i $c > 0$ są stałymi.

Zadanie 5. Adam i Marek zabawiali się w następującą grę. Adam wymyślał liczbę z zakresu od 0 do $n-1$. Zadaniem Marka było odgadnąć tę liczbę zadając Adamowi pytania, na które mógł odpowiadać jedynie TAK lub NIE. Niestety Adam miał skłonności do kłamania. Wiadomo było jednak, że Adam skłamie co najwyżej raz. Znajdź najmniejszą liczbę pytań, po której Marek zawsze odnajdzie szukaną liczbę.

Zadanie 6. [CLRS04, Zadanie 4.3-1.] Korzystając z Twierdzenia o rekurencji uniwersalnej [CLRS04, Twierdzenie 4.1] podaj z dokładnością do Θ rozwiązania następujących równań rekurencyjnych:

(1) $T(n) = 4T(n/2) + n$,
(2) $T(n) = 4T(n/2) + n^2$,
(3) $T(n) = 4T(n/2) + n^3$.

Zadanie 7. [CLRS04, Zadanie 4.3-4.] Korzystając z Twierdzenia o rekurencji uniwersalnej [CLRS04, Twierdzenie 4.1] podaj z dokładnością do Θ rozwiązanie równania rekurencyjnego

$$T(n) = 4T(n/2) + n^2 \log_2 n.$$

Zadanie 8. [CLRS04, Zadanie 4.3-5.] Przedstaw funkcję $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a+\varepsilon}\right)$ dla pewnej stałej $\varepsilon > 0$, taką że dla dowolnego $c < 1$ istnieje dowolnie duże n, przy którym $af(n/b) > cf(n)$.

Zadanie 9. [CLRS04, Zadanie 4.4-3.] Pokaż, że jeśli $af(n/b) \leqslant cf(n)$ dla pewnej stałej $c < 1$, to istnieje stała $\varepsilon > 0$, taka że $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a+\varepsilon}\right)$.

Zadanie 10. [CLRS04, Zadanie 4.4-2.] Niech $a \geqslant 1$ będzie stałą rzeczywistą i $b > 1$ będzie stałą naturalną, niech $f(n)$ będzie pewną funkcją i niech $T(n)$ będzie zdefiniowane dla n będących potęgami b przez rekurencję

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)\,.$$

Pokaż, że jeśli $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\log_2^k n\right)$, gdzie $k \geqslant 0$, to $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\log_2^{k+1} n\right)$.

LITERATURA

[CLRS04] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Wprowadzenie do algorytmów*. Klasyka Informatyki. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 6 zmienione i rozszerzone edition, 2004.