Teoretyczne podstawy informatyki

Wykład 11:
Opis wzorców - wyrażenia regularne.

http://hibiscus.if.uj.edu.pl/~erichter/Dydaktyka2009/TPI-2009

Wyrażenia regularne

- **Wyrażenia regularne** (ang. *regular expressions*) stanowią algebraiczny sposób definiowania wzorców.
- Wyrażenia regularne stanowią analogię do algebry wyrażeń arytmetycznych oraz do algebry relacyjnej.
- Zbiór wzorców które można wyrazić w ramach algebry wyrażeń regularnych odpowiada dokładnie zbiorowi wzorców, które można opisać za pomocą automatów.

Operandy wyrażeń regularnych

- Wyrażenia regularne posiadają pewne rodzaje operandów niepodzielnych (ang. *atomic operands*). Poniżej lista:
  1. Znak
  2. Symbol ε
  3. Symbol ∅
  4. Zmienna która może być dowolnym wzorcem zdefiniowanym za pomocą wyrażenia regularnego.
- **Wartość wyrażenia regularnego jest wzorcem** składającym się ze zbioru ciągów znaków, który często **określa się mianem języka** (ang. *language*).
- Język określony przez wyrażenia regularne **E** oznaczony będzie jako **L(E)** lub określany jako **język wyrażenia E**.

Języki operandów niepodzielnych

- Języki operandów niepodzielnych definiuje się w następujący sposób.
  1. Jeżeli **x** jest dowolnym znakiem, to wyrażenie regularne **x** oznacza język **{x}**, to znaczy **L(x) = {x}**.
     Należy zauważyć, że taki język jest zbiorem zawierającym jeden ciąg znakowy. Ciąg ten ma długość **1** i jedyna pozycja tego ciągu określa znak **x**.
  2. **L(ε) = {ε}**. Specjalny symbol **ε** jako wyrażenie regularne oznacza zbiór, którego jedynym ciągiem znakowym jest ciąg pusty, czyli ciąg o długości **0**.
  3. **L(∅) = ∅** . Specjalny symbol ∅ jako wyrażenie regularne oznacza zbiór pusty ciągów znakowych.
- Istnieją trzy operatory w odniesieniu do wyrażeń regularnych.
- Można je grupować przy użyciu nawiasów, podobnie jak ma to miejsce w przypadku innych znanych algebr.
- Definiuje się prawa kolejności działań oraz prawa łączności, które pozwalają na pomijanie niektórych par nawiasów – tak jak w przypadku wyrażeń arytmetycznych.

Operatory wyrażeń regularnych

- **Suma:**
  - Symbol sumy (ang. *union*) oznacza się za pomocą symbolu **|** . Jeżeli **R** i **S** są dwoma wyrażeniami regularnymi, to **R | S** oznacza sumę języków określanych przez **R** i **S**. To znaczy **L(R|S) = L(R) ∪ L(S)**.
  - **L(R) i L(S) są zbiorami ciągów znakowych, notacja sumowania jest uzasadniona.**
- **Złożenie:**
  - Operator złożenia (ang. *concatenation*) nie jest reprezentowany przez żaden odrębny symbol.
  - Jeżeli **R** i **S** są wyrażeniami regularnymi to **RS** oznacza ich złożenie. **L(RS)**, czyli język określony przez **RS**, jest tworzony z języków **L(R)** i **L(S)** w sposób następujący:
    - Dla każdego ciągu znakowego **r** należącego do **L(R)** oraz każdego ciągu znakowego **s** należącego do **L(S)**, ciąg **rs**, czyli złożenie ciągów **r** i **s**, należy do **L(RS)**.
  - **Złożenie dwóch list takich jak ciągi znaków, jest wykonywane przez pobranie po kolei elementów pierwszej z nich i uzupełnienie ich po kolei elementami drugiej listy.**

Operatory wyrażeń regularnych

- **Domknięcie:**
  - Operator domknięcia (ang. *closure*), jest to operator jednoargumentowy przyrostkowy. Domknięcie oznacza się za pomocą symbolu *****, tzn. **R*** oznacza domkniecie wyrażenia regularnego **R**. Operator domknięcia ma najwyższy priorytet.
  - Efekt działania operatora domknięcia można zdefiniować jako „określenie występowania zera lub większej liczby wystąpień ciągów znaków w R".
  - Oznacza to że **L(R*)** składa się z:
    1. Ciągu pustego **ε**, który można interpretować jako brak wystąpień ciągów znaków w **L(R)**.
    2. Wszystkich ciągów znaków języka **L(R)**. Reprezentują one jedno wystąpienie ciągów znaków w **L(R)**.
    3. Wszystkich ciągów znaków języka **L(RR)**, czyli złożenia języka **L(R)** z samym sobą. Reprezentują one dwa wystąpienia ciągów znaków z **L(R)**.
    4. Wszystkich ciągów znaków języka **L(RRR), L(RRRR)** i tak dalej, które reprezentują trzy, cztery i więcej wystąpień ciągów znaków z **L(R)**.
  - Nieformalnie można napisać: **R* = e | R | RR | RRR | …**
  - **Wyrażenie po prawej stronie to nie jest wyrażeniem regularnym ponieważ zawiera nieskończoną liczbę wystąpień operatora sumy. Wszystkie wyrażenia regularne są tworzone ze skończonej liczby wystąpień operatorów.**

Kolejność operatorów wyrażeń regularnych

- Istnieje określona kolejność wykonywania trzech działań wyrażeń regularnych: sumy, złożenia oraz domknięcia. Kolejność ta jest następująca:
  1. Domknięcie (najwyższy priorytet)
  2. Złożenie
  3. Suma (najniższy priorytet)
- **Przykład:**

  a | bc*d = (a | (b (c*)) d)

Prawa algebraiczne wyrażeń regularnych

- Możliwe jest aby dwa wyrażenia regularne określały ten sam język.
- Dwa wyrażenia regularne **R | S** oraz **S | R** określają ten sam język bez względu na postać wyrażeń regularnych jakie się podstawi za **R** i **S**. Wynika to z faktu że sumowanie jest przemienne.
- Dwa wyrażenia regularne są **równoważne** (ang. *equivalent*) jeżeli **L(R) = L(S)**.

Prawa algebraiczne wyrażeń regularnych

- **Tożsamość sumowania:**

  $$(\varnothing \mid R) \equiv (R \mid \varnothing) \equiv R$$

- **Tożsamość złożenia:** $\varepsilon R \equiv R \varepsilon \equiv R$
- **Anihilator złożenia:** $\varnothing R \equiv R \varnothing \equiv \varnothing$
- **Przemienność sumowania:** $(R \mid S) \equiv (S \mid R)$
- **Łączność sumowania:**

  $$((R \mid S) \mid T) \equiv (R \mid (S \mid T))$$

- **Łączność złożenia:**

  $$((R\,S)\,T) \equiv (R\,(S\,T))$$

Prawa algebraiczne wyrażeń regularnych

- **Lewostronna rozdzielność złożenia względem sumowania:**

  $(R (S \mid T)) \equiv (RS \mid RT)$

- **Prawostronna rozdzielność złożenia względem sumowania:**

  $((S \mid T) R) \equiv (SR \mid TR)$

- **Idempotencja sumowania:**

  $(R \mid R) \equiv R$

- **Równoważności operatora domknięcia:**

  $\varnothing^* \equiv \varepsilon$

  $RR^* \equiv R^*R$

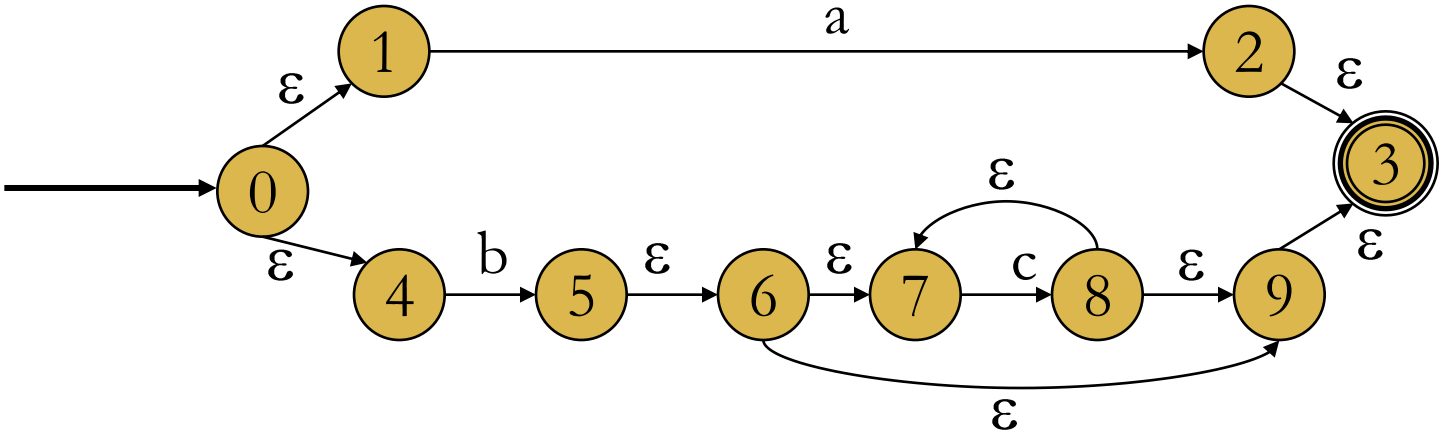
  $(RR^* \mid \varepsilon) \equiv R^*$

Od wyrażeń regularnych do automatów

- Istnieje sposób na zamianę dowolnego wyrażenia regularnego na automat niedeterministyczny, a następnie przez użycie konstrukcji podzbiorów – zamiany takiego automatu na automat deterministyczny.
- Istnieje także możliwość zamiany dowolnego automatu na wyrażenie regularne, którego język dokładnie odpowiada zbiorowi ciągów znaków akceptowanych przez automat. Stąd automaty i wyrażenia regularne dają te same możliwości opisywania języków.

Automaty z epsilon przejściami

- Należy rozszerzyć notacje używaną w przypadku automatów w celu umożliwienia opisu krawędzi **posiadających etykietę ε**. Takie automaty wciąż akceptują ciąg znaków **s** wtedy i tylko wtedy, gdy ścieżka zaetykietowana ciągiem **s** wiedzie od stanu początkowego do stanu akceptującego. **Symbol ε**, ciąg pusty, **jest „niewidoczny”** w ciągach znaków, stąd w czasie konstruowania etykiety danej ścieżki w efekcie usuwa się wszystkie symbole **ε** i używa tylko rzeczywistych znaków.



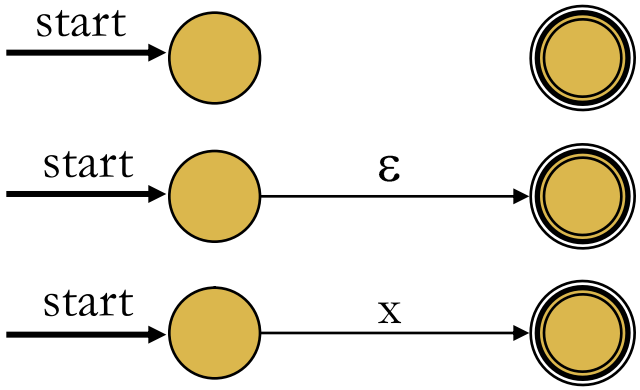
Automat z ε-przejściami dla wyrażenia a | bc*

Od wyrażeń regularnych do automatów z epsilon przejściami

- Wyrażenie regularne zamienia się na automat przy użyciu algorytmu opracowanego na podstawie indukcji zupełnej względem liczby wystąpień operatorów w wyrażeniu regularnym.
- **Twierdzenie S(n):**
  - Jeżeli **R** jest wyrażeniem regularnym o **n** wystąpieniach operatorów i braku zmiennych jako operatorów niepodzielnych, to istnieje automat **A** z ε-przejściami, który akceptuje ciągi znaków należące do języka **L(R)** i żadne inne.
  - Ponadto automat **A**:
    1. posiada tylko jeden stan akceptujący,
    2. nie posiada krawędzi wiodących do jego stanu początkowego,
    3. nie posiada krawędzi wychodzących z jego stanu akceptującego.

Podstawa

- Jeżeli **n=0**, to **R** musi być operandem niepodzielnym, którym jest ∅, **ε** lub **x** dla pewnego symbolu **x**.
- Dla owych trzech przypadków można zaprojektować 2-stanowy automat, spełniający wymagania twierdzenia **S(0)**.



Automat dla ∅

Automat dla ε

Automat dla x

- **Automaty dla przypadków bazowych.**
  Każdy spełnia warunki 1, 2, 3 (patrz poprzednia strona).

Indukcja

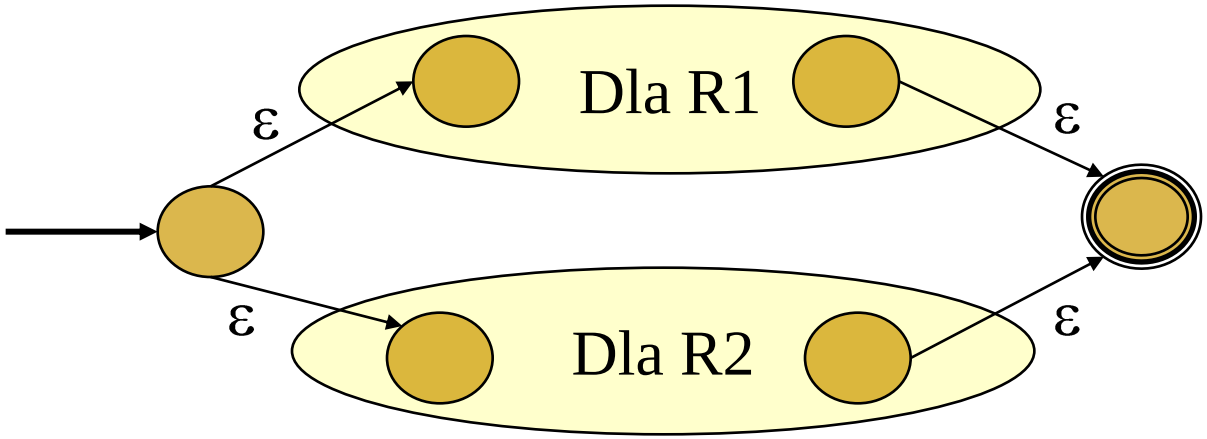
- Zakładamy teraz, ze **S(i)** jest prawdziwe dla wszystkich **i ≤ n.**
- To znaczy, że dla każdego wyrażenia regularnego **R** o maksymalnie **n** wystąpieniach istnieje automat spełniający warunek hipotezy indukcyjnej i akceptujący wszystkie ciągi znaków języka **L(R)** i żadnych innych.
- Zajmiemy się tylko najbardziej zewnętrznym operatorem w **R**, co oznacza, że wyrażenie **R** może mieć tylko formę

  R1 | R2, R1 R2, R1*

  w zależności od tego czy ostatni użyty operator był operatorem sumy, złożenia lub domknięcia.
- Wyrażenie **R1**, **R2** nie mogą posiadać więcej niż **n** operatorów.

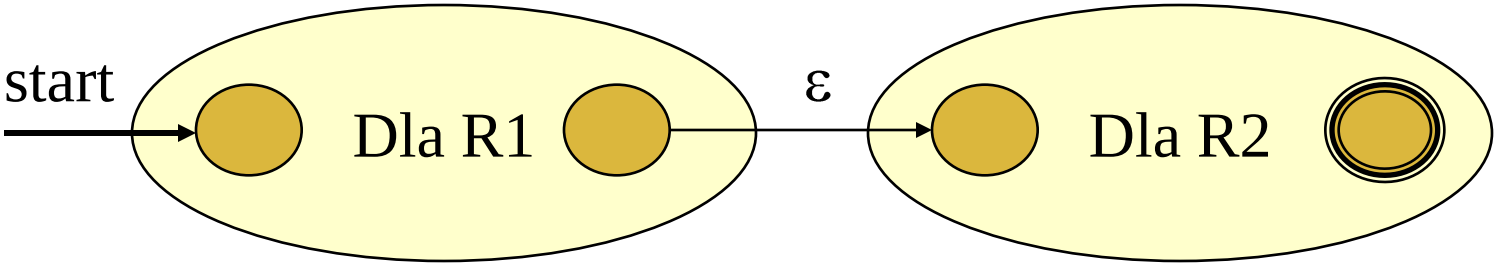
Przypadek 1: R = R1 | R2

- Przechodzimy krawędzią zaetykietowaną symbolem **ε** do stanu początkowego automatu dla **R1** lub automatu dla **R2**.
- Następnie przechodzimy do stanu akceptującego tego automatu, a później przejściem **ε** do stanu akceptującego automatu **R**.



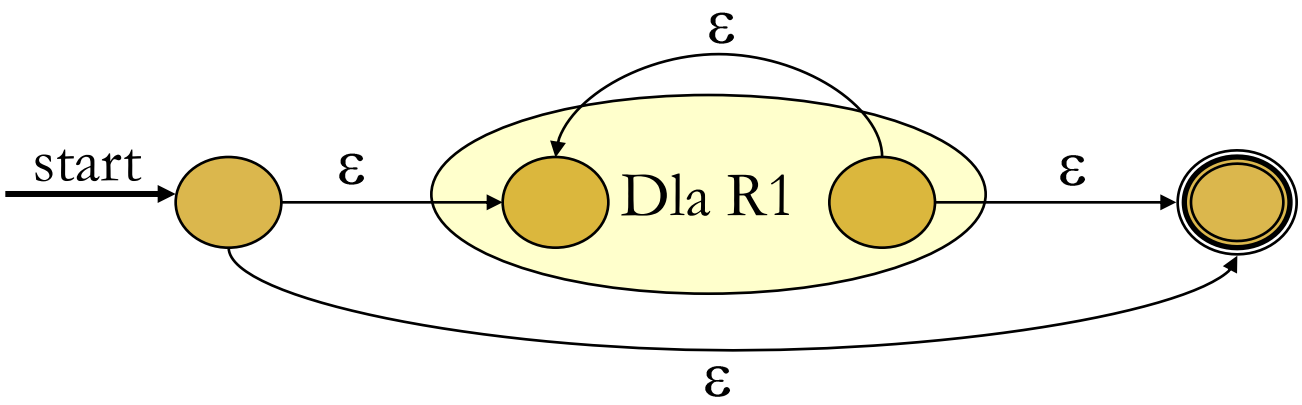
Przypadek 2: R = R1 R2

- Automat posiada jako swój stan początkowy stan początkowy automatu dla wyrażenia **R1**, a jako swój stan akceptujący – stan akceptujący dla wyrażenia **R2**.
- Dodajemy także **ε** - przejście ze stanu akceptującego automatu dla wyrażenia **R1** do stanu początkowego automatu dla wyrażenia **R2**.
- Stan akceptujący pierwszego automatu przestaje być stanem akceptującym, a stan początkowy drugiego automatu przestaje być stanem początkowym w skonstruowanym automacie.



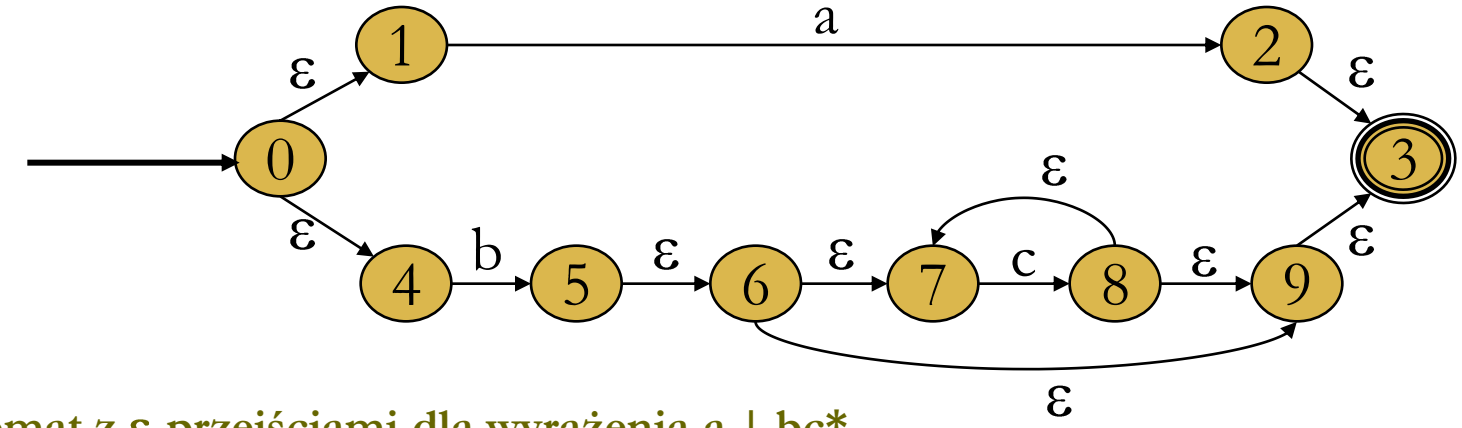
Przypadek 3: R = R1*

- Do automatu dla wyrażenia **R1** dodajemy nowy stan początkowy i akceptujący.
- Stan początkowy posiada **ε** przejście do stanu akceptującego (a więc akceptowany jest ciąg **ε**) oraz do stanu początkowego automatu dla wyrażenia **R1**.
- Stan akceptujący automatu dla wyrażenia **R1** otrzymuje **ε**-przejście z powrotem do swojego stanu początkowego oraz do stanu akceptującego automatu dla wyrażenia **R**.
- Stan początkowy i akceptujący automatu dla wyrażenia **R1** nie są stanami początkowym i akceptującym konstruowanego automatu. Etykiety ścieżek odpowiadają ciągom należącym do języka **L(R1*)** czyli **L(R)**.



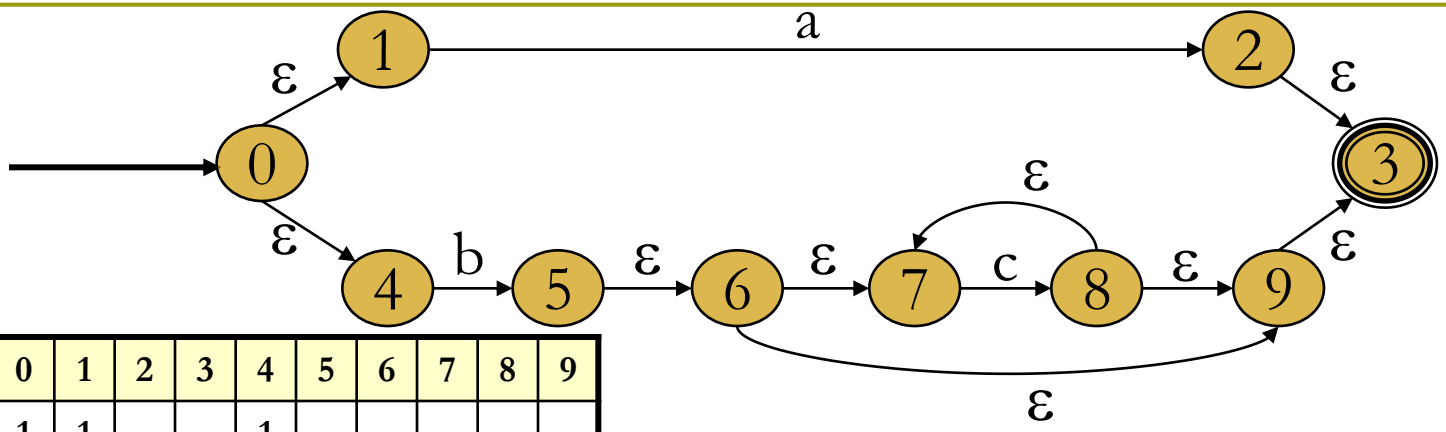
Eliminacja epsilon-przejść

- Jeżeli stanem bieżącym jest dowolny stan **s** automatu z **ε**-przejściami, oznacza to że jednocześnie stanem bieżącym jest dowolny stan, do którego można się dostać z **s** w wyniku przejścia ścieżki zawierającej krawędzie zaetykietowane symbolem **ε**.
- Wynika to z faktu, że bez względu na to, jaki ciąg etykietuje wybraną ścieżkę prowadzącą do **s**, ten sam ciąg będzie także stanowił etykietę ścieżki rozszerzonej o **ε**-przejścia.



Automat z ε-przejściami dla wyrażenia a | bc*

Eliminacja ε przejśc

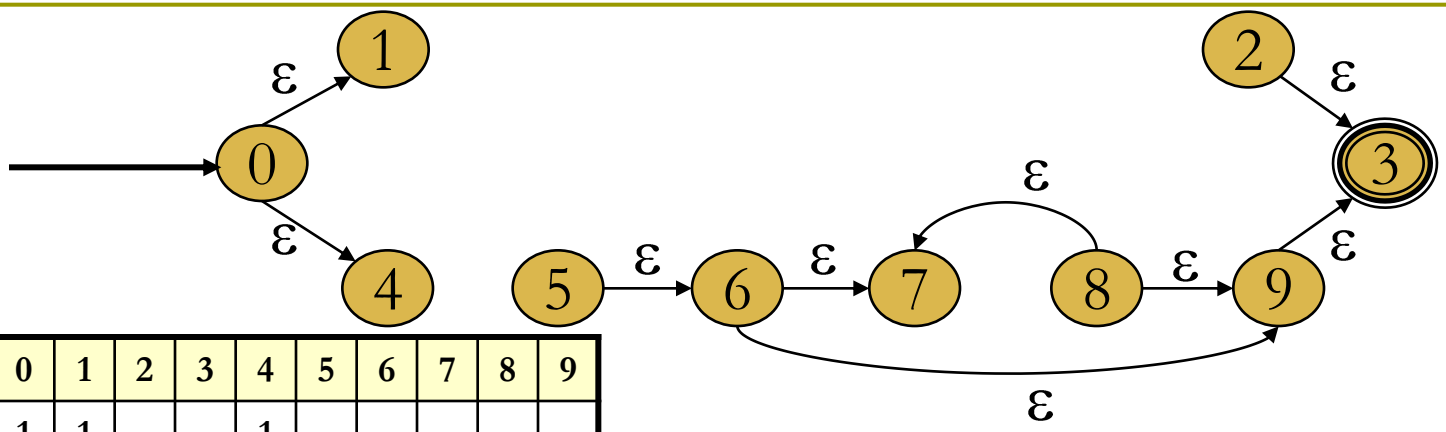


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1			1					
1		1								
2			1	1						
3				1						
4					1					
5				1		1	1	1		1
6				1			1	1		1
7				1				1		
8				1				1	1	1
9				1						1

Automat z ε-przejściami dla wyrażenia a | bc*

- Dla grafu automatu usuwamy wszystkie ścieżki oznaczone rzeczywistymi etykietami. Przeprowadzamy przeszukiwanie w głąb pozostałego grafu.

Tabela osiągalności



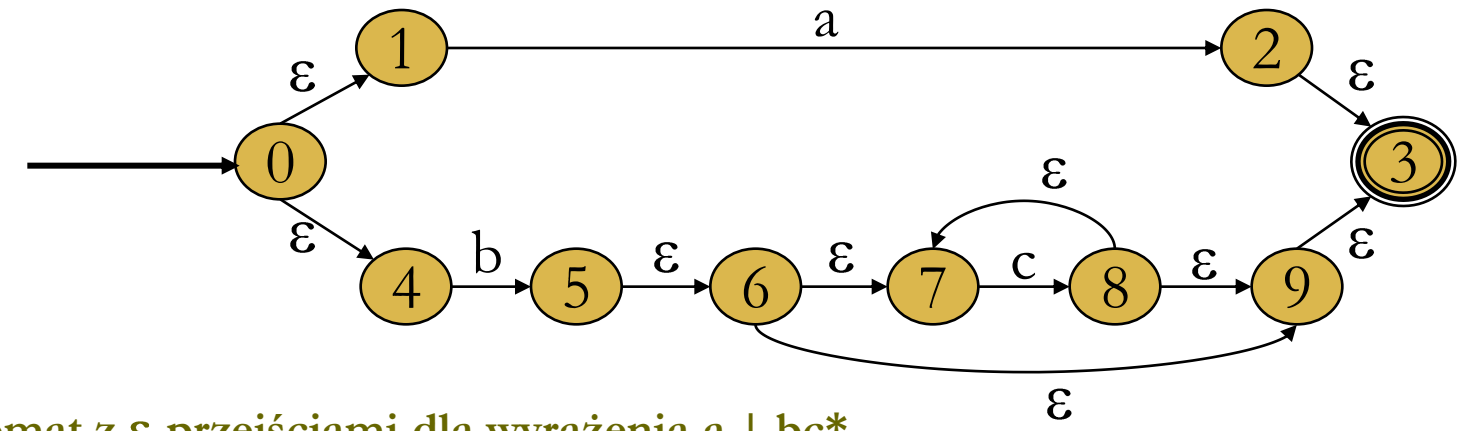
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1			1					
1		1								
2			1	1						
3				1						
4					1					
5				1		1	1	1		1
6				1			1	1		1
7				1				1		
8				1				1	1	1
9				1						1

Automat z ε-przejściami dla wyrażenia a | bc*

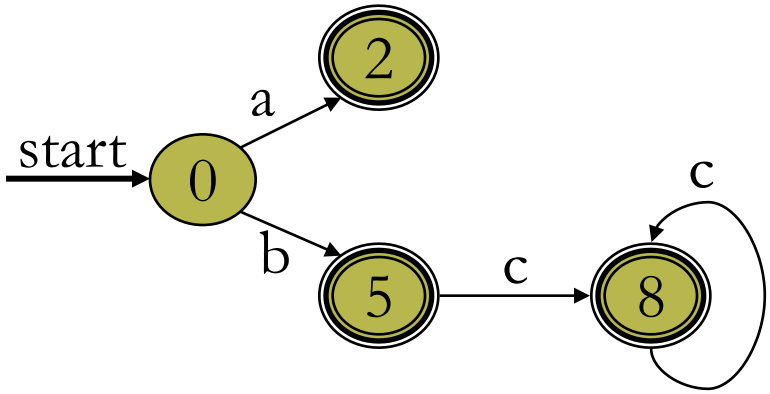
- Dla grafu automatu usuwamy wszystkie ścieżki oznaczone rzeczywistymi etykietami. Przeprowadzamy przeszukiwanie w głąb pozostałego grafu.

Tabela osiągalności

- Posiadając informacje o osiągalności, możemy skonstruować równoważny automat nie posiadający **ε**-przejść. Stany do których przechodzi się krawędziami zaetykietowanymi symbolami rzeczywistymi nazywamy **stanami istotnymi**.
- W nowym automacie chcemy zawrzeć tylko te stany oraz stany początkowe dla zbioru jego własnego zbioru stanów. Należy też zadecydować które stany będą stanami akceptującymi.

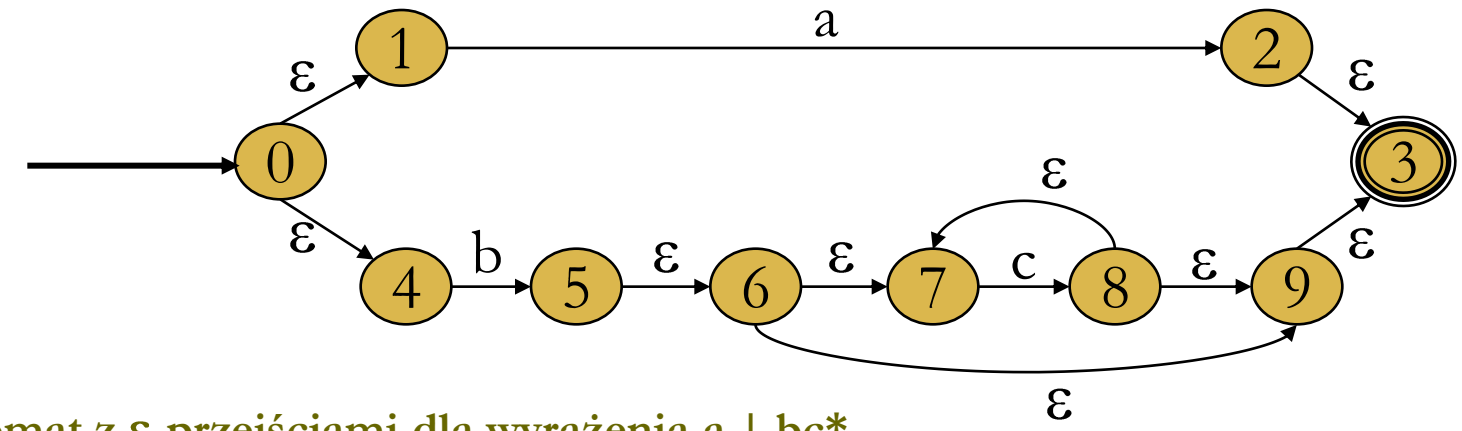


Automat z ε-przejściami dla wyrażenia a | bc*

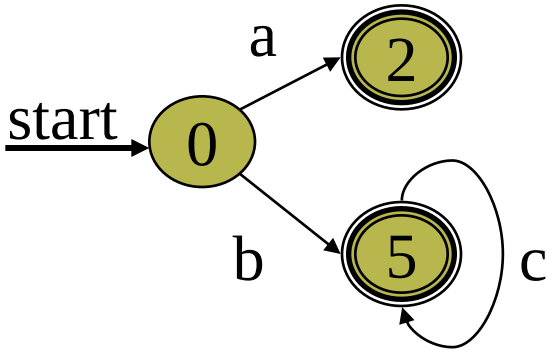


Automat skonstruowany na podstawie eliminacji ε -przejść.

Automat akceptuje wszystkie ciągi języka L (a | bc*).



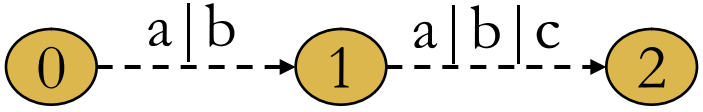
Automat z ε-przejściami dla wyrażenia a | bc*



- **Prostsza wersja automatu dla języka L (a | bc*).**
- **Wykorzystano obserwacje ze stany (5) i (8) są równoważne i mogą zostać połączone.**

Od automatów do wyrażeń regularnych.

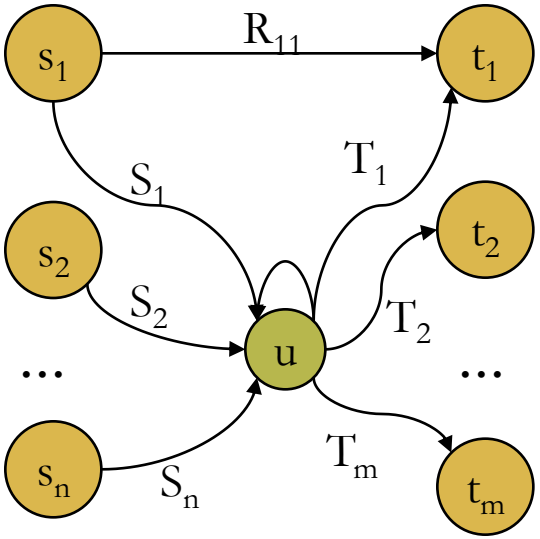
- Dla każdego automatu istnieje **A** wyrażenie regularne, którego język dokładnie odpowiada zbiorowi ciągu znaków akceptowanych przez automat **A**.
- Konstrukcja polega na eliminacji stanów automatów. Etykiety krawędzi, które są zbiorami znaków, zastępuje się bardziej skomplikowanymi wyrażeniami regularnymi.
- Jeżeli dla pewnej krawędzi istnieje etykieta **{x1,x2,...xn}**, zastępuje się ją wyrażeniem regularnym **x1 | x2 | … | xn**, które reprezentuje ten sam zbiór symboli.
- Etykietę ścieżki można postrzegać jako złożenie wyrażeń regularnych opisujących krawędzie tej ścieżki, lub jako język zdefiniowany przez złożenie tych wyrażeń.
- **Przykład:**
  - Wyrażenia regularne etykietujące krawędzie to **a | b** i **a | b | c**. Zbiór znaków etykietujących tę ścieżkę składa się z tych, które występują w języku zdefiniowanym przez wyrażenia regularne: **(a | b)(a | b | c)** czyli **{aa, ab, ac, ba, bb, bc}**.



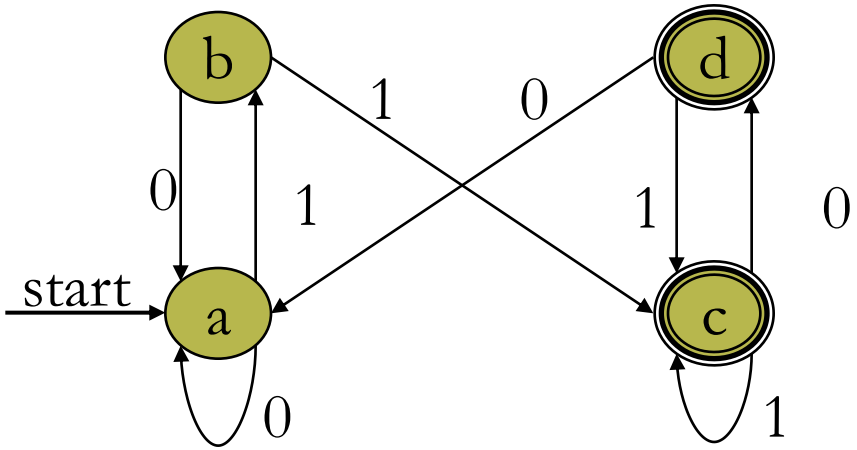
Ścieżka z wyrażeniami regularnymi jako etykietami. Etykieta ścieżki należy do wyrażeń regularnych utworzonych w wyniku złożeń.

Konstrukcja eliminacji stanów.

- Kluczowym etapem konwersji z postaci automatu na wyrażenie regularne jest eliminacja stanów. Chcemy wyeliminować stan **u**, ale chcemy zachować etykiety krawędzi występujące w postaci wyrażeń regularnych, tak aby zbiór etykiet ścieżek miedzy dowolnymi pozostałymi stanami nie uległ zmianie.
- Poprzedniki stanu **u** to $s_1, s_2, \ldots, s_n$ zaś następniki stanu **u** to $t_1, t_2, \ldots, t_m$ (mogą też istnieć stany wspólne).

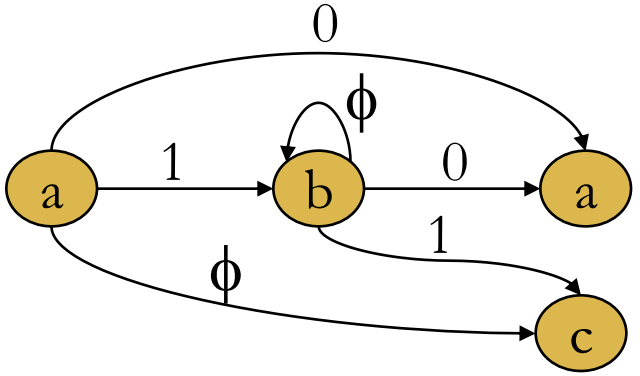


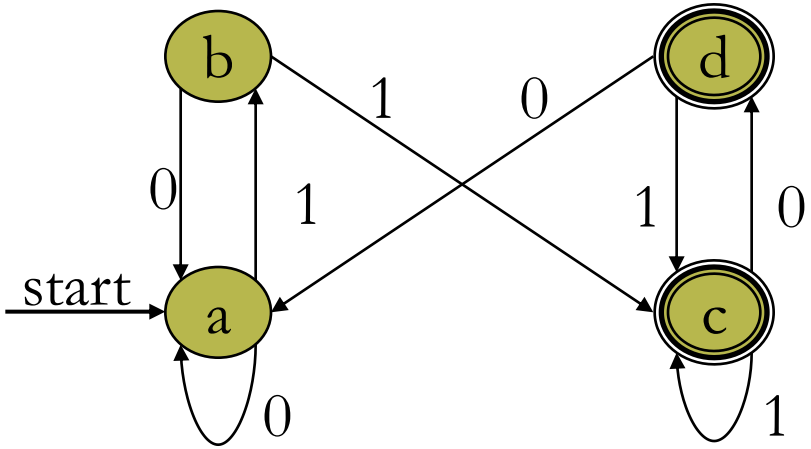
Zbiór ciągów znaków etykietujących ścieżki wiodące z wierzchołków s_i do wierzchołka **u**, włącznie z ścieżkami biegnącymi kilkakrotnie wokół pętli $u \rightarrow u$, oraz z wierzchołka **u** do wierzchołka t_j, jest opisany za pomocą wyrażenia regularnego $S_i\ U^*\ T_j$.
Po eliminacji wierzchołka **u** należy zastąpić etykietę R_{ij}, czyli etykietę krawędzi $s_i \rightarrow t_j$ przez etykietę $R_{ij} \mid S_i\ U^*\ T_j$.



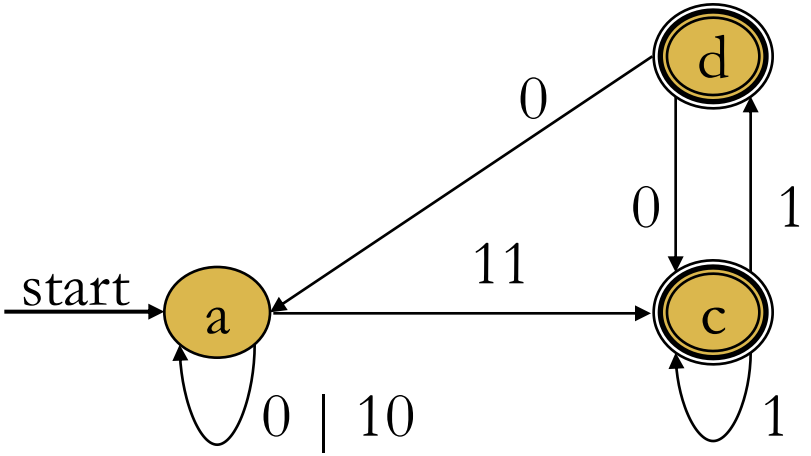
Automat skończony filtra odbijającego.

Stan b, jego poprzedniki oraz następniki.





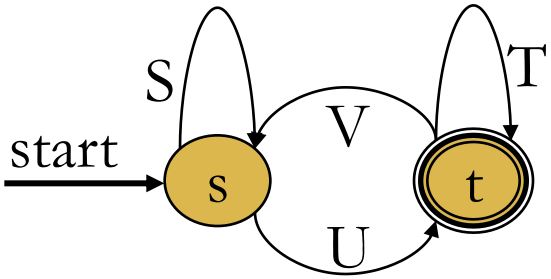
Automat skończony filtra odbijającego.



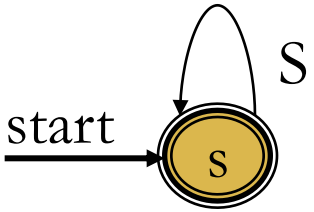
Automat skończony filtra odbijającego po wyeliminowaniu stanu b.

Redukcja zupełna automatu

- W celu otrzymania wyrażenia regularnego określającego wszystkie ciągi znaków akceptowane przez automat **A** i żadne inne, należy rozpatrzyć po kolei każdy stan akceptujący **t** automatu **A**.
- Każdy ciąg znaków akceptowany przez automat **A** jest akceptowany dlatego, że etykietuje on ścieżkę wiodąca ze stanu początkowego **s** do pewnego stanu akceptującego **t**.



Automat zredukowany do dwóch stanów.
Wyrażenie regularne: S*U(T | VS*U)*



Automat posiadający jedynie stan początkowy.
Wyrażenie regularne: S*

Posumowanie

- Trzy sposoby określania języków dają te same możliwości wyrażania:
  1. Istnieje pewien automat deterministyczny, akceptujący wszystkie ciągi znaków języka **L** i żadne inne.
  2. Istnieje pewien, być może niedeterministyczny automat, akceptujący wszystkie ciągi znaków języka **L** i żadne inne.
  3. Język **L** jest językiem **L(R)** pewnego wyrażenia regularnego.
- Konstrukcja podzbiorów pokazuje, że **2.** implikuje **1.**
- Stwierdzenie **1.** implikuje **2.** gdyż automat deterministyczny jest szczególnym rodzajem automatu niedeterministycznego.
- Przechodzenie od wyrażeń regularnych do automatów oznacza że **3.** implikuje **2.**
- Przechodzenie od automatów do wyrażeń regularnych oznacza że **2.** implikuje **3.**
- Automaty deterministyczne mogą być używane jako podstawa programów, które rozpoznają wiele różnych rodzajów wzorców w ciągach znaków.
- Wyrażenia regularne są często przydatną konwencją tonacyjną opisywania wzorców. Istnieje formalizm praw algebraicznych dla wyrażeń regularnych.