Sieci Neuronowe

Wykład 5
Sieć Hopfielda

wykład przygotowany na podstawie.
R. Tadeusiewicz, “Sieci Neuronowe”, Rozdz. 7. Akademicka Oficyna Wydawnicza RM, Warszawa 1993.
S. Osowski, “Sieci Neuronowe w ujęciu algorytmicznym”, Rozdz. 6. WNT, Warszawa 1996

Sprzężenie zwrotne jako nowa jakość w strukturach sieci

Dotychczas opisywane sieci charakteryzowały się *jednokierunkowym przepływem sygnałów.*

Można w nich było wyróżnić warstwę wejściową, wyjściową i ewentualnie warstwy pośrednie ("ukryte"). Jednak przepływ sygnałów w tych sieciach był ściśle jednokierunkowy: od wejścia do wyjścia.

Najbardziej znaną siecią której *kierunek jest odwrócony*, jest

sieć Hopfielda

Została opublikowana w 1982 roku i stała się punktem zwrotnym w badaniach sieci neuronowych.

Sprzężenie zwrotne jako nowa jakość w strukturach sieci

sieć Hopfielda

W sieci tej neurony mają nieliniowe charakterystyki:

$$y_m^{(j)} = \phi(e_m^{(j)})$$

gdzie (po etapie uczenia)

$$e_m^{(j)} = \sum_{i \in M} \omega_i^{(m)} y_i^{(j)} + x_m^{(j)}$$

a nieliniowość jest dana prostą funkcją binarną.

$$y_m^{(j+1)} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } e_m^{(j)} > \omega_0^{(m)} \\ y_m^{(j)} & \text{gdy } e_m^{(j)} = \omega_0^{(m)} \\ -1 & \text{gdy } e_m^{(j)} < \omega_0^{(m)} \end{cases}$$

Sprzężenie zwrotne jako nowa jakość w strukturach sieci

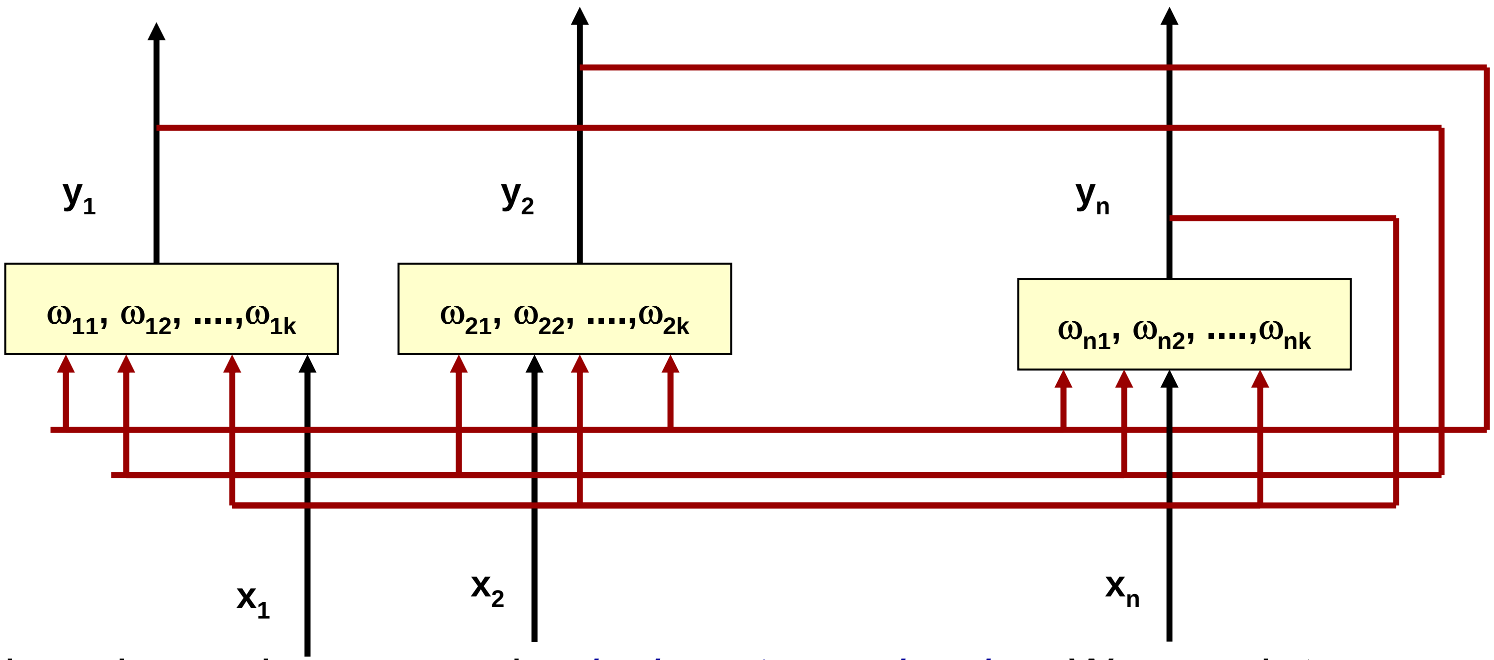
Interesujące są dwa elementy podanych wzorów:

⇒ Współczynniki wagowe $\omega_i^{(m)}$ łączące wyjście i-tego neuronu z wejściem m-tego neuronu *nie zależą* od *j*. Podane wzory dotyczą sieci już nauczonej, a *j* oznacza chwilę czasową, określającą w jakim momencie *procesu dynamicznego*, następującego po pobudzeniu sieci, znajduje się ona obecnie.

⇒ Sumowanie sygnałów wyjściowych $y_i^{(j)}$ z poszczególnych neuronów we wzorze definiującym łączne pobudzenie $e_m^{(j)}$ odbywa się *po wszystkich elementach* sieci. Oznacza to, że w sieci przewidziane są także połączenia z warstw dalej położonych (wyjściowych) do warstw wcześniejszych – czyli *sprzężenia* zwrotne.

Sieć o takim schemacie połączeń nazywa się *siecią autoasocjacyjną*. W ramach tego sprzężenia każdy neuron jest także połączony jednym z wejść ze swoim własnym wyjściem, zatem zasada autoasocjacyjności odnosi się także do pojedynczych neuronów.

Sprzężenie zwrotne jako nowa jakość w strukturach sieci



Sieć o takim schemacie nazywa się *siecią autoasocjacyjną*. W ramach tego sprzężenia każdy neuron jest połączony jednym z wejść także ze swoim własnym wyjściem, zatem zasada autoasocjacyjnosci odnosi się także do pojedynczych neuronów. Każdy neuron sieci ma także kontakt z pewnym, odpowiadającym mu sygnałem wejściowym $x_m^{(j)}$, zatem zaciera się tu podział na warstwę wejściową i pozostałe warstwy sieci. W związku z tym neurony sieci Hopfielda *nie tworzą* wcale *wyraźnie wydzielonych warstw*, mogą być rozważane w dowolnej topologii.

Natura procesów w sieci Hopfielda

W sieciach autoasocjacyjnych możliwe jest pojawianie się pewnych przebiegów dynamicznych polegających na tym, że uzyskane w pewnym kroku j wartości sygnałów wyjściowych $y_m^{(j)}$ wszystkich neuronów sieci $(m=1,2,...,k)$ stają się automatycznie wartościami wejściowymi $y_i^{(j+1)}$ w kolejnym kroku symulacji.

Oznacza to, że sieć realizuje nieliniowe wektorowe odwzorowanie.

$$\boxed{Y^{(j+1)} = \Xi\left(X^{(j)}, Y^{(j)} \right)}$$

które zwykle podlega dodatkowemu uproszczeniu, ponieważ przyjmuje się, że $x_m^{(j)} \equiv 0$, dla wszystkich m i dla wszystkich $j > 0$.

Natura procesów w sieci Hopfielda

Uproszczenie to ma następująca interpretację:

→ w chwili początkowej ($j=0$) do neuronów sieci (wszystkich lub wybranych) doprowadza się sygnały wejściowe $x_m^{(0)} \neq 0$.

→ w wyniku, na wyjściach neuronów sieci wytwarza się zestaw sygnałów wyjściowych $Y^{(1)}$.

→ sygnały wejściowe zostają odłączone i aż do końca symulacji nie uczestniczą w obliczeniach ($x_m^{(j)} \equiv 0$)

→ w sieci zaczyna rozwijać się pewien proces, polegający na wyznaczaniu kolejnych wartości $Y^{(j+1)} = \Xi (Y^{(j)})$

Natura procesów w sieci Hopfielda

Proces wyznaczamy przez kolejne wartości

$Y^{(1)}, Y^{(2)}, Y^{(3)}, \ldots\ldots\ldots , Y^{(j-1)}, Y^{(j)}, Y^{(j+1)}, \ldots\ldots$

można obserwować w przestrzeni stanu, do której należą wszystkie wektory sygnałów wyjściowych z elementów sieci $Y^{(j)}$.
W tej przestrzeni możliwe są wszystkie znane procesy, jakie związane są z realizacją nieliniowej rekurencyjnej zależności $Y^{(j+1)} = \Xi (Y^{(j)})$, a mianowicie stabilizowanie się przebiegów i ich zbieżność do określonych wartości Y^*, możliwe jest pojawianie się oscylacji wartości $Y^{(j)}$ i związanych z nimi *cykli* oraz *orbit* w przestrzeni Y, możliwe jest pojawianie się *przebiegów rozbieżnych*, wreszcie można w takim systemie przewidzieć możliwość pojawienia się *chaosu*.
O wyborze jednej z tych możliwości decyduje zestaw współczynników wagowych $\omega_i^{(m)}$.

Natura procesów w sieci Hopfielda

Stosunkowo wcześnie (1983) Cohen i Grossberg wykazali, że sieć generuje stabilne rozwiązania, jeżeli uniemożliwi się autoasocjacyjność pojedynczych neuronów $\omega_m^{(m)} = 0$, oraz zapewni się symetrię sieci $\omega_i^{(m)} = \omega_m^{(i)}$.

Ale nawet przy stabilnym zachowaniu pozostaje otwarty problem wyboru punktu docelowego Y^*.

Stan równowagi w sieci Hopfielda

Problem wyboru określonego “docelowego” stanu sieci można traktować jako problem wyboru stanu o “minimalnej” energii sieci. Funkcja “energii” (metafora wprowadzona przez Hopfielda) jest też określana nazwą funkcji Lapunowa.

$$E^{(j)} = (-1/2) \sum_{i\in\Im} \sum_{m\in\Im} \omega_i^{(m)} y_i^{(j)} y_m^{(j)} - \sum_{i\in\Im} x_i^{(j)} y_i^{(j)} + \sum_{i\in\Im} \omega_0^{(i)} y_i^{(j)}$$

Na podstawie tej definicji można wprowadzić pojecie *“zmiany stanu”sieci”*

$$\delta E^{(j)} = - [\sum_{m\neq j} \omega_i^{(m)} y_m^{(j)} - x_i^{(j)} - \omega_0^{(i)}] \, \delta y_i^{(j)}$$

Wzór ten można również zapisać w sposób bardziej czytelny

$$\delta E^{(j)} = - [e_i^{(j)} - \omega_0^{(i)}] \, \delta y_i^{(j)}$$

Na podstawie tego wzoru można rozważyć różne zachowania sieci.

Stan równowagi w sieci Hopfielda

Weźmy pod uwagę jeden z neuronów sieci (o numerze i) rozważając wszystkie możliwe stany jego pobudzenia $e_i^{(j)}$ i sygnału wyjściowego $y_i^{(j)}$.

$$\delta E^{(j)} = - [\ e_i^{(j)} - \omega_0^{(i)}\ ]\ \delta y_i^{(j)}$$

$\Rightarrow$ Jeśli $e_i^{(j)} > \omega_0^{(i)}$, zgodnie z zasada działania rozważanego modelu neuronu – na wyjściu tego neuronu powinien pojawić się sygnał $y_i^{(j)} = 1$. Oznacza to ze współczynnik $\delta y_i^{(j)}$ musi być w takim przypadku dodatni lub zerowy – nigdy ujemny. Równocześnie, przy $e_i^{(j)} > \omega_0^{(i)}$ także czynnik w kwadratowym nawiasie musi być dodatni, a zgodnie z podanym wzorem zmiana całkowitej "energii" sieci musi być ujemna lub zerowa.

Stan równowagi w sieci Hopfielda

Weźmy pod uwagę jeden z neuronów sieci (o numerze i) rozważając wszystkie możliwe stany jego pobudzenia $e_i^{(j)}$ i sygnału wyjściowego $y_i^{(j)}$.

$$\boxed{\delta E^{(j)} = - [\ e_i^{(j)} - \omega_0^{(i)}\ ]\ \delta y_i^{(j)}}$$

⇒ Jeśli $e_i^{(j)} < \omega_0^{(i)}$, to oczywiście $y_i^{(j)} = 0$ i wtedy czynnik $\delta y_i^{(j)}$ musi być ujemny lub zerowy. W rezultacie również wtedy, zmiana całkowitej energii $\delta E^{(j)}$ musi być ujemna (lub zerowa).

⇒ Jeśli $e_i^{(j)} = \omega_0^{(i)}$, to oczywiście $\delta E^{(j)} = 0$ i energia sieci nie zmienia się.

Stan równowagi w sieci Hopfielda

Z tego prostego rozumowania wynika, że całkowita "energia" sieci może pozostać stała lub może się zmniejszać – natomiast nie może rosnąć.

Skoro w trakcie pracy sieci "energia" stale maleje – musi wreszcie osiągnąć stan odpowiadający minimum – lokalnemu lub globalnemu.

Po osiągnięciu tego minimum dalsze zmiany w sieci są niemożliwe, proces się zatrzymuje.

Dynamiczne własności *sieci Hopfielda* wygodnie jest rozważać na podstawie ciągłego modelu zachowania sieci.

Procesy dynamiczne w sieciach Hopfielda

Wektor sumarycznych pobudzeń wszystkich neuronów sieci *e* można wtedy związać z wektorami sygnałów wyjściowych z elementów sieci Y oraz sygnałów wejściowych (zewnętrznych) X za pomocą macierzowego równania różniczkowego.

$$de/dt = -e/\tau + WY + X$$

uzupełnionego nieliniowym równaniem charakterystyki statycznej jednego elementu

$$y_i = \phi(e_i)$$

Dla takiego nieliniowego elementu systemu dynamicznego możliwe jest określenie *funkcji Lapunowa*

Procesy dynamiczne w sieciach Hopfielda

Dla takiego nieliniowego elementu systemu dynamicznego możliwe jest określenie *funkcji Lapunowa* w postaci

$$L = -1/2\, Y^T W Y - X^T Y + 1/\tau \sum_{i=1}^{k} \int_0^{y_i} \phi^{-1}(\xi) d\xi$$

która upraszcza się w przypadku funkcji ϕ zbliżonej kształtem do skoku jednostkowego, przyjmując postać

$$L = -1/2\, Y^T W Y - X^T Y$$

Siec Hopfielda może być wykorzystywana jako tzw. *pamięć autoasocjacyjna* (skojarzeniowa). Czasem ten rodzaj sieci nazywany tez bywa CAM (Content Adressable Memory).

Pamięć autoasocjacyjna

Przedyskutujmy jej działanie:

$\Rightarrow$ Sieć powinna zapamiętać szereg wektorów D_j (j=1,2,...M) i po pojawieniu się wektora wejściowego X podobnego do któregoś z zapamiętanych wzorców sieć powinna, na zasadzie zapamiętanych skojarzeń, odnaleść i odtworzyć ten zapamiętany wektor D_j, który kojarzy się z wektorem X.

$\Rightarrow$ Uczymy sieć metodą Hebba, wytwarzając współczynniki wagowe $\omega_i^{(m)}$ przy połączeniach miedzy i-tym i n-tym neuronem zgodnie z zasada

$$\boxed{\omega_i^{(m)} = \Sigma\, y_i^{(j)}\, y_m^{(j)}}$$

gdzie $y_i^{(j)}$ jest i-ta składową wektora $D_{j.}$

$\Rightarrow$ W wyniku takiego postępowania, macierz W połączeń miedzy elementami sieci ma postać

$$\boxed{W = \Sigma\, D_j^T\, D_j}$$

Pamięć autoasocjacyjna

Działanie sieci polega na jednorazowym (impulsowym) podaniu sygnałów wejściowych X i swobodnej relaksacji sieci do najbliższego stanu stabilnego odpowiadającego minimum energii. Ten stan interpretujemy jako "skojarzony" z bodźcem X zapamiętany sygnał D.

Pojemność takiej pamięci jest szacowana przez różnych autorów rozmaicie. Jak wiadomo, sieć binarnych elementów złożona z N neuronów może znajdować się ogólnie w jednym z 2^N rozróżnialnych stanów, jednak rzeczywista pojemność sieci jest znacznie mniejsza.

Pamięć autoasocjacyjna

Przy opisanych wyżej zastosowaniach sieci neuronowych jako pamięci asocjacyjnej sygnały wyjściowe z elementów sieci przyjmuje się jako ciągle $y \in [1-,1]$, a nieliniowa funkcja $y_m^{(j)} = \phi(e_m^{(j)})$ może być przedstawiona w formie klasycznej sigmoidy.

$$y_m^{(j)} = \phi(e_m^{(j)}) = 1/\ (1 + \exp(-\beta\ e_m^{(j)})\ )$$

Dla dużych β funkcja jest stroma i przypomina funkcje progowa. Dla małych β funkcja ta ma przebieg gładszy i łagodniejszy i zachowanie sieci przestaje mieć opisany powyżej dyskretny charakter.

Maszyny Boltzmanna

Z dyskutowaną siecią Hopfielda kojarzone są zwykle tak zwane

Maszyny Boltzmanna.

Koncepcja takiej maszyny oparta jest na założeniu, że stan (sygnał wyjściowy $y_m^{(j)}$) każdego neuronu może się zmieniać w sposób losowy z określonym prawdopodobieństwem.
Prawdopodobieństwo to zależy od "energii" i "temperatury" sieci, podobnie jak w systemach fizycznych (termodynamicznych), w których gęstość prawdopodobieństwa $p(E,T)$ energii systemu E związana jest z temperaturą T znanym wzorem Boltzmanna

$$\boxed{p(E,T) = e^{-E/kT}}$$

gdzie k jest stałą Boltzmanna.

Maszyny Boltzmanna

Przenosząc to prawo do informacyjnego systemu, jakim jest sieć neuronowa, możemy na każdym kroku j związać z neuronem o numerze m "energię" $E_m^{(j)}$ wyrażającą nadwyżkę jego łącznego pobudzenia $e_m^{(j)}$ ponad progiem pobudzenia $\omega_0^{(m)}$.

$$\boxed{E_m^{(j)} = e_m^{(j)} - \omega_0^{(m)}}$$

Następnie w oparciu o energię $E_m^{(j)}$ wyznaczane jest prawdopodobieństwo $p_m^{(j)}$ zgodnie z regułą będącą *uogólnieniem prawa Boltzmanna*.

$$\boxed{p_m^{(j)} = 1/[1+\exp(-\delta E_m^{(j)} /T^{(j)})]}$$

gdzie δ jest pewną arbitralnie dobierana stałą, a $T^{(j)}$ reprezentuje symulowaną w j-tym kroku *"temperaturę"* sieci.

Maszyny Boltzmanna

Algorytm doprowadzania sieci do stanu równowagi sprowadza się do kolejnego wykonywania dwóch kroków:

1. Dla ustalonego $T^{(j)}$ wyliczane są wszystkie wartości $p_m^{(j)}$, a następnie losowo z prawdopodobieństwem $p_m^{(j)}$ ustawiane są wartości sygnałów wyjściowych neuronów $y_m^{(j)}$.

2. Obniża się stopniowo wartość $T^{(j)}$ w kolejnych krokach, np. $T^{(j+1)} = T^{(j)}-\varepsilon$ lub $T^{(j+1)} = T^{(j)} (1-\varepsilon)$.

Powtarza się punkt (1) aż do osiągniecie stanu równowagi.

Maszyny Boltzmanna

Proces ten – na podstawie analogii z procesem tzw. odprężania stosowanego w cieplnej obróbce metali nazywa się zwykle symulowanym odprężaniem (simulated annealing), ponieważ podobnie jak obrabianemu materiałowi – sieci nadaje się na początku wysoką "temperaturę" $T^{(j)}$, a potem stopniowo się ją obniża doprowadzając do osiągnięcia globalnego minimum łącznej energii wewnętrznej sieci.

Technika "maszyny Boltmanna" może być stosowana do dowolnej sieci, nie tylko sieci Hopfielda (autoasocjacyjnych). Jeśli sieć ma wyróżnione sygnały wejściowe i wyróżnione sygnały wyjściowe, to wówczas także można skorzystać z koncepcji osiągania przez sieć *"stanu równowagi"* termodynamicznej.

Implementacja sprzętowa sieci Hopfielda

Sieć Hopfielda, ze względu na równoległą strukturę układową i powtarzalny typ elementów, nadaje się do realizacji sprzętowej przy użyciu standartowych elementów technologii mikroelektronicznej.

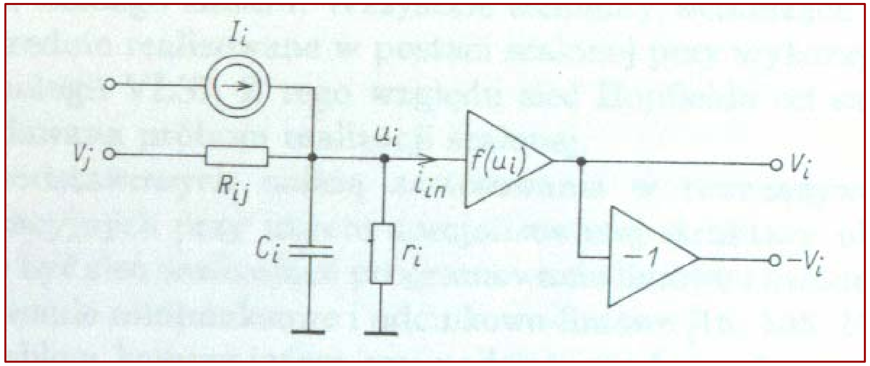
Punktem wyjścia jest opis sieci równaniem różniczkowym

$$\tau_i \, du_i/dt = -u_i + \Sigma \, W_{ij} \, f(u_j) + b_i$$

gdzie

$$u_j = \Sigma \, W_{ij} \, x_j$$

a b_i jest pewna wartością progową .



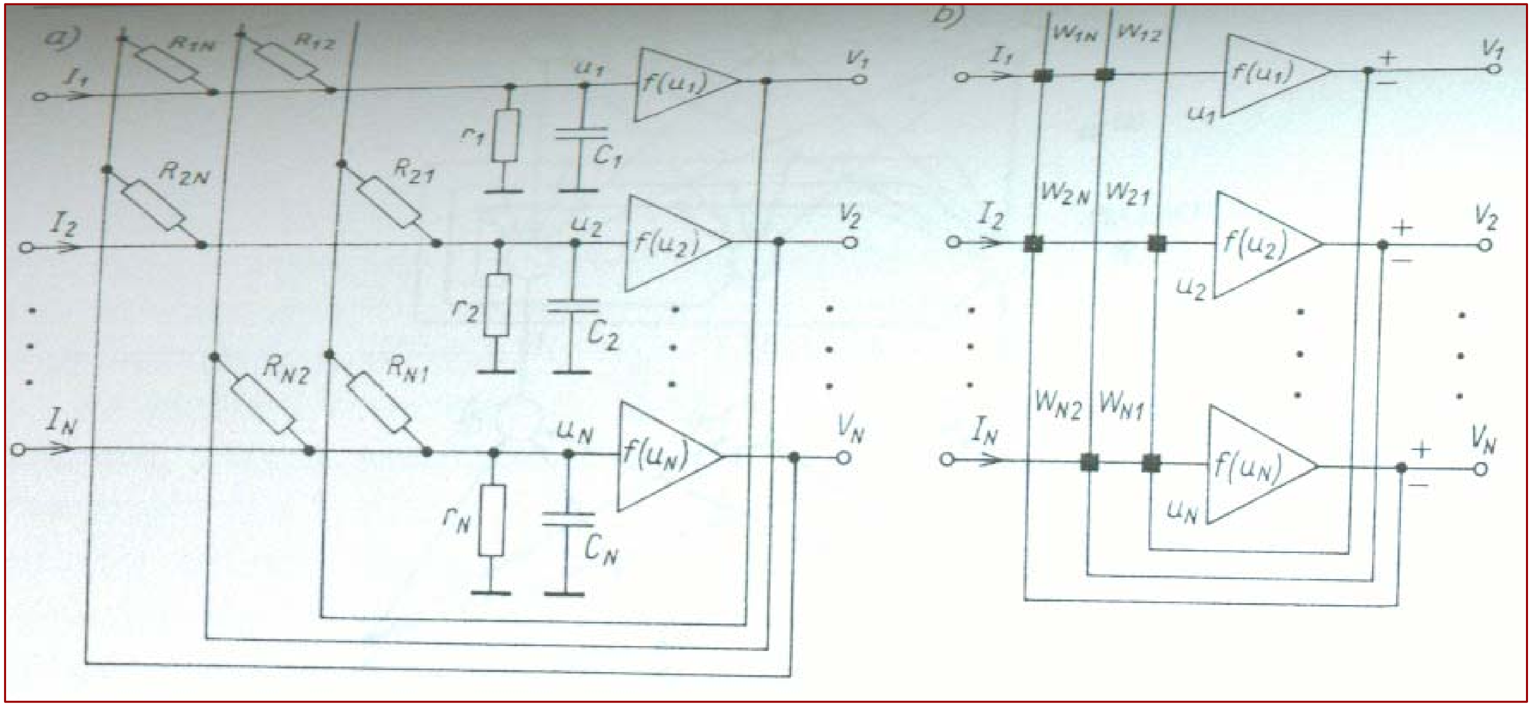
Dobieramy rezystancję r_i małą w porównaniu z pozostałymi R_{ij}.

Wówczas $t_i \cong r_i \, C_i$

$$W_{ij} \cong r_i/R_{ij}$$

$$b_i \cong r_i \, I_i$$

Implementacja sprzętowa sieci Hopfielda



Schemat układu zaproponowany przez Hopfielda nie jest jedyną możliwą realizacja. Niezależnie od technologii implementacji, sieci Hopfielda charakteryzują się budowa modułową o powtarzalnej strukturze każdego kanału.

Zastosowania sieci Hopfielda

Do podstawowych należą zastosowania w rozwiązywaniu zagadnień optymalizacyjnych przy użyciu specjalizowanej struktury układu.

Przykładem może być *siec realizująca programowanie liniowe* i *kwadratowe*, *programowanie minimaksowe i odcinkowo-liniowe*. Sieć rozwiązująca *problem komiwojażera*, lub *podziału grafu na 2 części* zapewniające minimalna liczbę połączeń miedzy obu częściami.

Drugą rodzinę zastosowań stanowi przetwarzanie sygnałów przy użyciu *struktury Hopfielda*. W tej grupie można wyróżnić *przekształcenie Fouriera* czy *przetwarzanie i dekompozycję sygnałów*.

Zastosowania sieci Hopfielda

Wspólną cechą wszystkich układów opartych na sieci Hopfielda jest *duża szybkość działania*. Dobierając stała czasową integratorów τ_i w zakresie nanosekund można uzyskać rozwiązanie określonego problemu w czasie o rząd lub najwyżej dwa rzędy wielkości dłuższym niż stała czasowa integratora, co odpowiada czasowi mikrosekund. Mówi się wówczas, że układ działa w czasie rzeczywistym.

Problemem który należy rozwiązać korzystając z implementacji sprzętowej sieci Hopfielda, jest stosunkowo skomplikowana metoda projektowania.

W zastosowaniach praktycznych przy określaniu optymalnych wag sieci korzysta się z *metody obliczeniowej* opartej na pojęciu *funkcji energetycznej Lapunowa.*

Metoda projektowania sieci Hopfielda

Dla konkretnego problemu definiuje się funkcję celu wyrażoną jako funkcje wag sieci Hopfielda. Przez porównanie jej do ogólnej postaci funkcji energetycznej uzyskuje się układ równań umożliwiający określenie wartości dobieranych wag.

Wagi połączeń miedzyneuronowych są więc obliczane, a nie uzyskiwane w wyniku klasycznego uczenia sieci. Sieć Hopfielda spełniająca określoną funkcję ma wagi stałe nie podlegające uczeniu. W tym sensie każda sieć jest specjalizowana do wykonania określonego zadania.

Zmiana warunków zadania wymaga ponownego przeprojektowania sieci, a nie douczenia, jak w przypadku sieci jednokierunkowych. Zmienia się przy tym zwykle struktura połączeń miedzyneuronowych.

Metoda projektowania sieci Hopfielda

Dobierane wagi sieci stanowią *pamięć długoterminową*. Podanie warunków niezerowych na sieć powoduje uruchomienie procesu rekurencyjnego prowadzącego do jednego z minimów lokalnych, jakim odpowiadają zakodowane wagi sieci. *Stan stabilny neuronów* stanowi tak zwaną *pamięć krótkoterminowa*.

Niestety, oprócz minimów lokalnych właściwych powstają również *minima pasożytnicze*, w których może utknąć aktualny punkt pracy, generując niewłaściwe rozwiązanie.

Przeciwdziałanie niepożądanym punktom równowagi odbywa się na etapie projektowania, przez uwzględnienie ich wpływu drogą odpowiedniej modyfikacji funkcji energetycznej lub stworzenia bardziej rozbudowanego układu logicznego współpracującego z siecią Hopfielda.

Przykład: konwerter

Przykład realizacji przetwornika analogowo-cyfrowego (Tanka, Hopfield, 1986).

⇒ Role neuronów w opisywanym systemie odgrywały wzmacniacze operacyjne połączone w ten sposób, że wyjście każdego z nich było podawane na wejścia wszystkich pozostałych przez regulowane rezystory pełniące funkcje współczynników wagowych (elektrycznym analogonem wartości wagi jest przewodność określonego rezystora wejściowego).

⇒ Zapis $\omega_i^{(j)}$ jest rozumiany jako waga i-tego wejścia w neuronie o numerze j. Wzmacniacze posiadają wejścia odwracające fazę i wejścia proste – możliwe jest realizowanie zarówno wartości $\omega_i^{(j)} > 0$ i $\omega_i^{(j)} < 0$.

⇒ Dla zapewnienia stabilności działania sieci wykluczono połączenia łączące wyjście danego neuronu z jego wejściem ($\omega_i^{(j)} = 0$) oraz zapewniono symetrie sieci ($\omega_i^{(j)} = \omega_j^{(i)}$).

Przykład: konwerter

Na wejścia wszystkich elementów sieci podawany jest ten sam sygnał wejściowy X przez rezystory odpowiadające wadze $\omega_x^{(j)}$. Zadaniem sieci jest wytworzenie na wyjściach $y^{(j)}$ wszystkich neuronów (j=1,2,...k) sygnałów $y^{(j)}$ odpowiadających binarnemu k-bitowemu kodowi sygnalizującemu analogową wartość X.

$\Rightarrow$ Sygnały $y^{(j)}$ powinny być przy tym binarne (czyli 0 lub 1), a wartości liczby dwójkowej reprezentowanej przez wartości $y^{(j)}$ (wynosząca $\sum_{j=0}^{k-1} 2^j y^{(j)}$) powinna być jak najbliższa wartości X.

W takiej sieci poprawna praca systemu jest zapewniona, jeśli dokonana jest minimalizacja *funkcji "energii"* o postaci

$$E^{(j)} = (-1/2) \left(X - \sum 2^j y^{(j)} \right)^2 + \sum \left(2^{2j-1} \right) [\, y_i^{(j)} (1- y_i^{(j)}) \,]$$

Działanie sieci polega na minimalizowaniu funkcji energii.

Przykład: konwerter

Działanie sieci polega na minimalizowaniu funkcji “energii” o postaci

$$E^{(j)} = (-1/2)\left(X - \sum_{j=0}^{k-1} 2^j y^{(j)} \right)^2 + \sum_{j=0}^{k-1} \left(2^{2j-1} \right) \left[y_i^{(j)} \left(1 - y_i^{(j)}\right) \right]$$

→ Pierwszy składnik wzoru może być traktowany jako suma kwadratów błędów popełnianych przez sieć.

→ Drugi składnik osiąga małą wartosc dla $y_i^{(j)} = 0,1$ przy innych $y_i^{(j)}$ wartościach składnika wzrasta stanowiąc swoistego rodzaju “karę” za niewłaściwe wartości wyjść.

Minimalizacja wskazanej funkcji energii sprawia, że na wyjściach pojawiaja się wartości zbliżone do wartości binarnych, kodujące zgodnie z arytmetyką dwójkową wartości wejściowego sygnału X. Współczynniki wagowe w podanym wzorze to $\omega_i^{(j)} = -2^{(i+j)}$, $\omega_x^{(j)} = 2^j$.

Takie sieci realizowano i pracowały efektywnie, choć przetwornik A/C można też zbudować znacznie prościej bez wykorzystania sieci.

Przykład: problem komiwojażera

Podobny przykład – efektownego zastosowania sieci do rozwiązania zadania możliwego do rozwiązania też innymi metodami, to słynna praca Van den Bouta i Milera (1988), pokazująca zastosowanie sieci Hopfielda do rozwiązania klasycznego problemu optymalizacyjnego, tak zwanego *"problemu komiwojażera"*
zwanego TSP (*Traveling Salesman Problem*).

Problem:
ustalenie optymalnej trasy objazdu miast przez wędrownego sprzedawcę, który musi być we wszystkich miastach przynajmniej raz i chce jak najmniej wydać na same podróże.

Jako dane przy rozwiązywaniu problemu podane są odległości d_{ij} pomiędzy wszystkimi miastami, a koszt podroży sprzedawcy jest równy długości sumarycznie przebytej przez niego drogi.

Przykład: problem komiwojażera

Problem ten należy do *zadań NP-zupelnych*, czyli jego rozwiązanie rośnie wykładniczo przy wzroście liczby rozważanych miast n. Przy n-miastach możliwe jest zbudowanie $D=n!/(2n)$ rozróżnialnych tras. ($n=60$, $D=69{,}34155\ 10^{78}$)

Technika rozwiązania tego problemu przy pomocy sieci Hopfielda

⇒ *nie jest wolna od wad* – w szczególności przy jego rozwiązywaniu sieć "łatwo" ulega "wciąganiu" w lokalne minima, co prowadzi do rozwiązań suboptymalnych. Zdarza się to stosunkowo rzadko (dane z literatury).

❑ *ma oczywiste zalety* – pracując współbieżnie neurony sieci mogą rozwiązać postawiony problem w krótkim czasie mimo jego niewielomianowej złożoności. Wzrost wymiaru problemu będzie wymagał rozbudowy sieci lecz nie będzie powodował znacznego wzrostu czasu obliczeń.

Przykład: problem komiwojażera

Kluczem do sukcesu przy stosowaniu sieci neuronowej w *problemie TSP* jest odnalezienie odpowiedniej reprezentacji danych.

W opisanym przez Tanka rozwiązaniu, każde miasto reprezentowane jest za pomocą wiersza zawierającego n neuronów. W takim wierszu dokładnie jeden neuron może przyjmować wartość "1", a wszystkie pozostałe maja sygnały wyjściowe wartości "0". Pozycja (od 1 do n) na której występuje neuron sygnalizujący "1" odpowiada kolejności, w jakiej właśnie to miasto ma być odwiedzone przez wędrownego sprzedawcę. Liczba wierszy musi odpowiadać liczbie miast, zatem łączna liczba neuronów jest n^2.

Przykład: problem komiwojażera

Każdy neuron w sieci musi być indeksowany dwoma wskaźnikami. Pierwszy z nich dotyczy numeru miasta, a drugi kolejności, w jakiej to miasto powinno być odwiedzane. Tak więc w tej sieci sygnał y_{xi} oznaczać będzie sygnał wyjściowy z neuronu wchodzącego w skład wiersza odpowiadającego miastu numer x, przy czym neuron ten odpowiada i-tej pozycji w tym wierszu, czyli $y_{xi} = 1$ oznacza, ze x-te miasto należy odwiedzić w i-tej kolejności. Opisując funkcje "energii" minimalizowanej przez rozważaną siec trzeba brać pod uwagę cztery jej składniki:

$$E_1 = A/2 \sum_x \sum_i \sum_{i \neq j} y_{xi}\, y_{xj}$$

$E_1 = 0$ tylko gdy w każdym wierszu jest najwyżej jedna jedynka.
$E_1 \neq 0$ to "kara" za niejednoznaczność kolejności odwiedzin.

$$E_2 = B/2 \sum_i \sum_x \sum_{z \neq x} y_{xi}\, y_{zj}$$

$E_2 = 0$ tylko gdy w każdej kolumnie jest najwyżej jedna jedynka.
$E_2 \neq 0$ to "kara" za niejednoznaczność kolejności odwiedzin.

$$E_3 = C/2 \left[\left(\sum_x \sum_i y_{xi}\, y_{xj}\right) - n\right]^2$$

$E_3 = 0$ tylko gdy w macierzy jest dokładnie n jedynek.

$$E_4 = D/2 \sum_x \sum_{z \neq x} \sum_i d_{xz}\, y_{xj} \left(y_{z,i+1} + y_{z,i-1}\right)$$

E_4 oznacza długość wybranej drogi
(wskaźniki brane modulo n czyli $y_{n+j} = y_j$)

Przykład: problem komiwojażera

$$E_1 = A/2 \sum_x \sum_i \sum_{i \neq j} y_{xi}\, y_{xj}$$

$E_1 = 0$ tylko gdy w każdym wierszu jest najwyżej jedna jedynka.
$E_1 \neq 0$ to "kara" za niejednoznaczność kolejności odwiedzin.

$$E_2 = B/2 \sum_i \sum_x \sum_{z \neq x} y_{xi}\, y_{zj}$$

$E_2 = 0$ tylko gdy w każdej kolumnie jest najwyżej jedna jedynka.
$E_2 \neq 0$ to "kara" za niejednoznaczność kolejności odwiedzin.

$$E_3 = C/2 \left[\left(\sum_x \sum_i y_{xi}\, y_{xj}\right) - n\right]^2$$

$E_3 = 0$ tylko gdy w macierzy jest dokładnie n jedynek.

$$E_4 = D/2 \sum_x \sum_{z \neq x} \sum_i d_{xz}\, y_{xj}\, (y_{z,i+1} + y_{z,i-1})$$

E_4 oznacza długość wybranej drogi
(wskaźniki brane modulo n czyli $y_{n+j} = y_j$)

Współczynniki A, B, C, D są wybierane arbitralnie i oznaczają względne wagi poszczególnych warunków.
→ Duże wartości A,B,C oznaczają silne związanie poszukiwanych rozwiązań z warunkami zadania
→ Duże wartości D oznaczają silne związanie rozwiązania z optymalizowana funkcja celu
(minimalizacja kosztów podroży).

Przykład: problem komiwojażera

W rozważanej sieci współczynniki wagowe określające parametry połączeń pomiędzy i-tym neuronem x-tej warstwy, a j-tym neuronem z-tej warstwy wyrażają się wzorem:

$$\omega_{xi,\, zj} = -A\, \delta_{xz} (1- \delta_{ij}) -B\, \delta_{ij} (1- \delta_{xz}) - C - D\, d_{xz} (\delta_{j,i+1} + \delta_{j,i-1})$$

gdzie δ_{ij} oznacza funkcje Kronekera ($\delta_{ij} = 1$ dla $i=j$ oraz 0 w pozostałych przypadkach).
Dodatkowym elementem parametryzującym sieć jest zestaw wyrazów wolnych (od progów pobudzenia), których wartości dla wszystkich elementów sieci są identyczne i wynoszą:

$$\omega_{xz}^{0} = C\, n$$

Również istotny jest wybór wartości d_{xz} (optymalne wyniki dla $d_{xz} = 0.375$).

Przykład: problem komiwojażera

W cytowanych już pracach Tanka i Hopfielda stosowano nieliniową funkcję opisującą neurony $y_{xz} = \phi(e_{xz})$ w postaci

$$y_{xz} = ½ [1 + \tanh(e_{xz}/e_0)]$$

Charakterystyka ta zależy od parametru e_0, który reguluje jej kształt:

→ przyjęcie zbyt dużej wartości e_0 prowadzi do ustalanie się w sieci stanów końcowych, którym odpowiadają wartości y_{xz} nie będące wartościami bliskimi 0 albo 1, a więc rozwiązania są niejednoznaczne.

→ przyjęcie zbyt malej wartości e_0 utrudnia znalezienie optymalnego rozwiązania.

W oryginalnej pracy, Hopfield stosował $e_0 = 0.2$.

Przykład: problem komiwojażera

Dynamika sieci rozwiązującej *zadanie TSP* może być opisana układem równań różniczkowych,

$$de_{xi}/dt = - e_{xi}/\tau \ -A \sum_{i \neq j} y_{xj} \ -B \sum_{z \neq x} y_{zi} - C \left[\left(\sum_{x} \sum_{j} y_{xj} \right) - n \right]^2 - D \sum_{z \neq x} d_{xz}(y_{z,i+1} + y_{z,i-1})$$

opisujących zachodzące w czasie zmiany sygnałów wyjściowych yxi wszystkich neuronów sieci oraz ich sumarycznych pobudzeń exi. oraz równań algebraicznych ustalających wartości sygnałów wyjściowych.
Na wyniki uzyskiwane przy rozwiązywaniu problemu komiwojażera duży wpływ mogą mieć warunki początkowe, przyjmowane dla neuronów sieci przy jej startowaniu.

Przykład: problem komiwojażera

Faktycznie, niestety nigdy nie udało się odtworzyć oryginalnych wyników publikowanych przez Hopfielda i Tanaka.

Dopiero istotne modyfikacje pomysłu wprowadzone przez Aiyer, Niranjan i Fallside (1990) umożliwiły eksperymentalne obserwacje dobrego działania "sieci Hopfielda" dla *problemu TSP*.

(patrz nastepne wyklady)

Zestaw pytań do testu

1. Czy sieć Hopfielda ma sprzężenie zwrotne?
2. Czy w sieci Hopfielda można określić warstwy, jeżeli nie to dlaczego?
3. Czy sieć Hopfielda ma jakiś związek z maszyną Boltzmanna? Na czym polega to skojarzenie?
4. Na czym polega zdolność do pamięci krótkoterminowej i długoterminowej w sieciach Hopfielda?
5. Czy wagi sieci Hopfielda ulegają zmianie w procesie uczenia?
6. Co to znaczy że sieć Hoppfielda osiąga stan równowagi?